



جمهورية مصر العربية  
وزارة التربية والتعليم  
والتعليم الفني  
الإدارة المركزية لشئون الكتب

# الرياضيات

الصف الأول الثانوى      الفصل الدراسي الأول



للرياضيات تطبيقات عملية في مجالات متعددة منها إنشاء الطرق والكيارى وتخطيط المدن وإعداد خرائطها التي تعتمد على توافر المستقيمان و المستقيمان المقاطعة لها وفق تناسب بين الطول الحقيقي والطول في الرسم.

## إعداد

أ/ عمر فؤاد جاب الله

أ.د/ عفاف أبو الفتوح صالح      أ.د/ نبيل توفيق الضبع  
أ.م.د/ عصام وصفي روفائيل      أ/ سيرا فيم إياس إسكندر  
أ/ كمال يونس كبشة

## مراجعة

أ/ سمير محمد سعداوى      أ/ فتحي أحمد شحاتة

## إشراف علمي

مستشار الرياضيات

## إشراف تربوي

مركز تطوير المناهج

غير مصرح بتداول هذا الكتاب خارج وزارة التربية والتعليم والتعليم الفني

٢٠٢٠/٢٠١٩



## المقدمة

### بسم الله الرحمن الرحيم

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التي تم في ضوئها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيما يلي:

- ١ التأكيد على أن الغاية الأساسية من هذا الكتاب هي مساعدة المتعلم على حل المشكلات واتخاذ القرارات في حياته اليومية، والتي تساعد على المشاركة في المجتمع.
- ٢ التأكيد على مبدأ استمرارية التعلم مدى الحياة من خلال العمل على أن يكتسب الطلاب منهجية التفكير العلمي، وأن يمارسوا التعلم الممتزج بالمتعة والتشويق، وذلك بالاعتماد على تنمية مهارات حل المشكلات وتنمية مهارات الاستنتاج والتعليل، واستخدام أساليب التعلم الذاتي والتعلم النشط والتعلم التعاوني بروح الفريق، والمناقشة والحوار، وتقبل آراء الآخرين، والموضوعية في إصدار الأحكام، بالإضافة إلى التعريف ببعض الأنشطة والإنجازات الوطنية.
- ٣ تقديم رؤية شاملة متماسكة للعلاقة بين العلم والتكنولوجيا والمجتمع (STS) تعكس دور التقدم العلمي في تنمية المجتمع المحلي، بالإضافة إلى التركيز على ممارسة الطلاب التصرف الواعي الفعال جيل استخدام الأدوات التكنولوجية.
- ٤ تنمية اتجاهات إيجابية تجاه الرياضيات ودراساتها وتقدير علمائها.
- ٥ تزويد الطلاب بثقافة شاملة لحسن استخدام الموارد البيئية المتاحة.
- ٦ الاعتماد على أساسيات المعرفة وتنمية طرائق التفكير، وتنمية المهارات العلمية، والبعد عن التفاصيل والحشو، والابتعاد عن التعليم التقليدي؛ لهذا فالاهتمام يوجه إلى إبراز المفاهيم والمبادئ العامة وأساليب البحث وحل المشكلات وطرائق التفكير الأساسية التي تميز مادة الرياضيات عن غيرها.

#### وفي ضوء ما سبق روعي في هذا الكتاب ما يلي:

- ★ تقسيم الكتاب إلى وحدات متكاملة ومتراصة لكل منها مقدمة توضح أهدافها ودروسها ومخطط تنظيمي لها والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضح الهدف من تدريسها للطلاب تحت عنوان سوف تتعلم، ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس وروعي عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب ويتضمن مجموعة من الأنشطة التي تتناول الربط بالمواد الأخرى والحياة العملية والتي تناسب القدرات المختلفة للطلاب وتراعى الفروق الفردية بينهم وتؤكد على العمل التعاوني، وتتكامل مع الموضوع.
- ★ كما قدم في كل درس أمثلة تبدأ من السهل إلى الصعب، وتشمل مستويات تفكير متنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان حاول أن تحل وينتهي كل درس ببند «تحقق من فهمك».
- ★ تنتهي كل وحدة بملخص للوحدة يتناول المفاهيم والتعليمات الواردة بالوحدة.

وأخيراً.. نتمنى أن نكون قد وفقنا في إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولصبرنا العزيزة.  
والله من وراء القصد، وهو يهدي إلى سواء السبيل



# المحتويات

## الجبر والعلاقات والدوال

الوحدة الأولى

٤	حل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد.	١-١
٩	مقدمة عن الأعداد المركبة.	٢-١
١٥	تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية.	٣-١
١٩	العلاقة بين جذرى معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها.	٤-١
٣٦	إشارة الدالة.	٥-١
٣٣	متباينات الدرجة الثانية في مجهول واحد.	٦-١
٣٧	ملخص الوحدة.	

## التشابه

الوحدة الثانية

٤٢	تشابه المضلعات.	١-٢
٤٨	تشابه المثلثات.	٢-٢
٦١	العلاقة بين مساحتي سطحى مضلعين متشابهين.	٣-٢
٧١	تطبيقات التشابه فى الدائرة.	٤-٢
٧٩	ملخص الوحدة.	

## نظريات التناسب فى المثلث

الوحدة الثالثة

٨٢	المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة.	١-٣
٩٤	منصفا الزاوية والأجزاء المتناسبة.	٢-٣
١٠٣	تطبيقات التناسب فى الدائرة.	٣-٣
١١٢	ملخص الوحدة.	

## حساب المثلثات

الوحدة الرابعة

١١٦	الزاوية الموجهة.	١-٤
١٢٤	القياس الستينى والقياس الدائرى لزاوية.	٢-٤
١٣١	الدوال المثلثية.	٣-٤
١٣٩	الزوايا المنتسبة.	٤-٤
١٤٩	التمثيل البياني للدوال المثلثية.	٥-٤
١٥٢	إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية.	٦-٤
١٥٧	ملخص الوحدة.	



## الجبر

### الوحدة

## الجبر والعلاقات والدوال

## Algebra, Relations and Functions

### أهداف الوحدة

- في نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادراً على أن:
- يحل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد جبرياً وبيانياً.
  - يوجد مجموع وحاصل ضرب جذري معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد.
  - يتعرف بعض معاملات حدود معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد بمعلومية أحد الجذرين أو كليهما.
  - يتعرف المميز لمعادلة الدرجة الثانية في متغير واحد.
  - يبحث نوع جذري معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد بمعلومية معاملات حدودها.
  - يكون معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد بمعلومية معادلة أخرى من الدرجة الثانية في متغير واحد.
  - يبحث إشارة دالة.
  - يتعرف مقدمة في الأعداد المركبة (تعريف العدد المركب، قوى ت، كتابة العدد المركب بالصورة الجبرية، تساوي عددين مركبين).
  - يحل متباينات من الدرجة الثانية في مجهول واحد.

### المصطلحات الأساسية

Complex Number	عدد مركب	مميز المعادلة	Equation	معادلة
Imaginary Number	عدد تخيلي	Discriminant of the Equation		جذر المعادلة
Powers of a Number	قوى العدد	إشارة دالة	Root of the Equation	
Inequality	متباينة	Sign of a function	Coefficient of a Term	معامل الحد

## درس الوحدة

- الدرس (١ - ١): حل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد.  
 الدرس (١ - ٢): مقدمة عن الأعداد المركبة.  
 الدرس (١ - ٣): تحديد نوع جذري المعادلة التربيعية.  
 الدرس (١ - ٤): العلاقة بين جذري معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها.  
 الدرس (١ - ٥): إشارة الدالة.  
 الدرس (١ - ٦): متباينات الدرجة الثانية في مجهول واحد.

## الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية - ورق مربعات - حاسب آلي - برامج رسومية - بعض المواقع الإلكترونية مثل:

www.phschool.com

تمثال لمحمد بن موسى الخوارزمي

## لبنه تاريخية

الجبر كلمة عربية استعملها محمد بن موسى الخوارزمي (القرن التاسع الميلادي في عصر الخليفة العباسي المأمون) في كتابه الذي ألفه، وكان عنوانه «الجبر والمقابلة»، والذي وضع فيه طرقاً أصيلة لحل المعادلات، وبذلك يعتبر الخوارزمي هو مؤسس علم الجبر بعد أن كان الجبر جزءاً من الحساب. وقد تُرجم الكتاب إلى اللغات الأوروبية بعنوان «الجبر» ومنها أخذت كلمة «الجبر» (algebra).

والجذر هو الذي نرمز له حالياً بالرمز  $\sqrt{\quad}$  (إشارة إلى حل معادلة الدرجة الثانية) وقد وضع الخوارزمي حلولاً هندسية لحل معادلات الدرجة الثانية التي تتفق مع طريقة إكمال المربع. واشتغل كثير من العلماء العرب بحل المعادلات، ومن أشهرهم عمر الخيام الذي اهتم بحل معادلات الدرجة الثالثة. وجدير بالذكر أنه ظهر في برديّة أحمس (١٨٦٠ ق.م) بعض المسائل التي يشير حلها إلى أن المصريين في ذلك الحين قد توصلوا إلى طريقة لإيجاد مجموع المتتابعة الحسابية والمتتابعة الهندسية.

وقد وصل علم الجبر حالياً إلى درجة كبيرة من التطور والتجريد؛ فبعد أن كان يتعامل مع الأعداد أصبح يتعامل مع كيانات رياضية جديدة مثل: المجموعات، والمصفوفات والمتجهات وغيرها.

والأمل معقود عليكم - أبناءنا الطلاب - في استعادة مجدنا العلمي في عصوره الذهبية المصرية الفرعونية والعصور الإسلامية، والتي حمل علماءنا فيها لواء التقدم ومشاعل المعرفة إلى العالم شرقاً وغرباً.

## مخطط لتلخيص الوحدة





# حل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد

## Solving Quadratic Equations in One Variable

١ - ١

### ناقش فكر q

سبق أن درست المعادلات الجبرية في متغير واحد، وفي هذا الدرس سوف تدرس المعادلات الجبرية من الدرجة الثانية في متغير واحد. والآن سوف نستعرض ما سبق لك دراسته من المعادلات الجبرية ذات المتغير الواحد.

١- تسمى المعادلة:  $أس + ب = ٠$  حيث  $أ \neq ٠$  بأنها معادلة من الدرجة الأولى في متغير واحد هو  $س$  (لأن أكبر قوى فيها للمتغير  $س$  هو العدد ١)

٢- تسمى المعادلة:  $أس^٢ + ب س + ج = ٠$  حيث  $أ \neq ٠$  معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد هو  $س$  (لأن أكبر قوى فيها للمتغير  $س$  هو العدد ٢)

وعلى ذلك فالمعادلة:  $أس^٢ - ٢س - ٥ = ٠$  تسمى معادلة من الدرجة الثالثة. (لأن أعلى  $أس$  فيها للمتغير  $س$  هو ٣).

### سوف تتعلم

- مفهوم المعادلة الجبرية ذات المتغير الواحد.
- التمييز بين المعادلات والعلاقات والدوال.
- حل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد جبريًا وبيانيًا.

### المصطلحات الأساسية

Equations, relations and functions

### المعادلات والعلاقات والدوال

سبق أن درست حل معادلة الدرجة الثانية جبريًا كالتالي، بطريقتين:

أولاً: بتحليل المقدار  $أس^٢ + ب س + ج$  حيث  $أ، ب، ج \in \mathbb{R}$ ،  $أ \neq ٠$  (إذا كان ذلك ممكنًا في  $\mathbb{R}$ ).

ثانيًا: باستخدام القانون العام، ويكون جذرا المعادلة  $أس^٢ + ب س + ج = ٠$  هما:

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أج}}{٢أ}$$

حيث  $أ$  معامل  $س^٢$ ،  $ب$  معامل  $س$ ،  $ج$  الحد المطلق.

والآن سوف تدرس حل معادلة الدرجة الثانية بيانيًا.

Equation	معادلة
Relation	علاقة
Function	دالة
Factor	عامل
Coefficient	معامل

### حل معادلة الدرجة الثانية بيانيًا

Solving quadratic equation graphically

#### تذكر

المقدار الثلاثي  $أس^٢ + ب س + ج$  حيث  $أ، ب، ج$  أعداد صحيحة يمكن تحليله كحاصل ضرب كثيرتي حدود معاملاتها أعداد صحيحة إذا ولقط إذا كان المقدار  $ب^٢ - ٤أج$  مربع كامل

#### مثال

١ حل المعادلة:  $س^٢ + س - ٦ = ٠$  بيانيًا، ثم تحقق من صحة الحل.

#### الحل

لحل المعادلة  $س^٢ + س - ٦ = ٠$  بيانيًا نتبع الآتي:

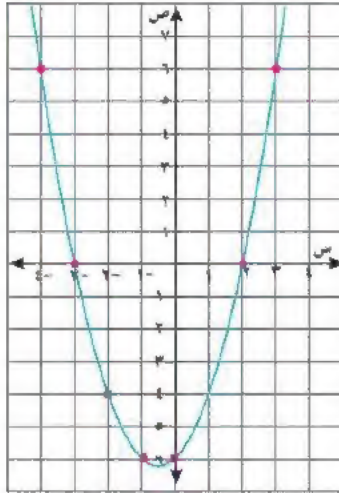
★ نرسم الشكل البياني للدالة  $د$  حيث  $د(س) = س^٢ + س - ٦$

### الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية
- ورق رسم بياني



★ نعين مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنى الدالة مع محور السينات، فتكون هي مجموعة حل المعادلة.



لرسم الدالة د (س) = ص، ص = س<sup>2</sup> + س - 6

ننشئ جدولاً لبعض قيم س، ثم نوجد قيم ص المناظرة لها كالآتي:

س	٤-	٣-	٢-	١-	٠	١	٢	٣
ص	٦	٠	٤-	٦-	٦-	٤-	٠	٦

★ نعين هذه النقاط في المستوى الإحداثي المتعامد، ونصل بينهما بمنحنى كما في الشكل المجاور.

ومن الرسم نجد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة مع محور السينات وهي س = 3-، س = 2 وبذلك تكون مجموعة حل المعادلة س<sup>2</sup> + س - 6 = 0 هي {2، 3-}.

يمكنك استخدام الحل الجبري لكي تطابقه مع الحل البياني كالآتي:

$$\text{المعادلة: } س^2 + س - 6 = 0$$

$$\text{تحليل المقدار الثلاثي: } (س + 3)(س - 2) = 0$$

$$\text{إما } س + 3 = 0 \quad \text{أو} \quad س - 2 = 0$$

$$\text{أى } س = -3 \quad \text{أو} \quad س = 2 \quad \text{مجموعة الحل هي } \{2, 3-\}$$

**التحقق من صحة الحل:**

$$\text{عندما } س = -3: \text{ الطرف الأيمن للمعادلة } = (-3)^2 + (-3) - 6 = 9 - 3 - 6 = 0 \text{ (الطرف الأيسر)}$$

$$\text{س } = -3 \text{ تحقق المعادلة.}$$

$$\text{عندما } س = 2: \text{ الطرف الأيمن للمعادلة } = 2^2 + 2 - 6 = 4 + 2 - 6 = 0 \text{ (الطرف الأيسر)}$$

$$= 6 - 2 + 4 = 0 \text{ (الطرف الأيسر)}$$

$$\text{س } = 2 \text{ تحقق المعادلة.}$$

**للحظة أن:**

١- في التمثيل البياني للعلاقة السابقة ص = س<sup>2</sup> + س - 6

◀ العلاقة تمثل دالة؛ لأن الخط الرأسى يقطع المنحنى في نقطة واحدة.

◀ المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

◀ المدى هو  $[-\frac{1}{4}, \infty)$

٢- للتعبير عن الدالة يستخدم الرمز د(س) بدلاً من ص، ويُقرأ دالة س.

**تفكير ناقد:** ١- هل كل دالة علاقة؟ فسر ذلك بأمثلة.

٢- هل يمكن تمثيل العلاقات والدوال بمعادلات؟ فسر ذلك.

#### تذكر

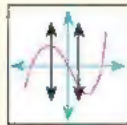
إذا كان أ، ب أعداداً حقيقية

وكان أ × ب = ٠

فإن: أ = ٠ أو ب = ٠

اختبار الخط الرأسى

Vertical line test



دالة

الخط الرأسى يقطع المنحنى في نقطة واحدة فقط



ليست دالة

الخط الرأسى يقطع المنحنى في نقطتين أو أكثر

### حاول أن تحل

- ١ مثل العلاقة  $ص = س - ٤$  بيانيًا، ثم أوجد من الرسم مجموعة حل المعادلة  $٠ = ٤ - ٢$  وإذا كانت  $ص = د(س)$  فبيّن أن  $د$  دالة، وحدّد مجالها ومداها [ناقش معلمك].

### مثال

- ٢ **الربط بالفيزياء:** أطلقت قذيفة رأسياً بسرعة (ع) تساوي ٢٤,٥ متر/ث. احسب الفترة الزمنية (ن) بالثانية التي تستغرقها القذيفة حتى تصل إلى ارتفاع ف متر، حيث (ف) تساوي ١٩,٦ مترًا، علماً بأن العلاقة بين ف، ن كالتالي:  
 $ف = ع - ن - ٤,٩$ .

### الحل

بالتعويض عن:  $ف = ١٩,٦$  متر،  $ع = ٢٤,٥$  متر/ث في العلاقة  $ف = ع - ن - ٤,٩$  ن

$$\therefore ١٩,٦ = ٢٤,٥ - ن - ٤,٩ \text{ ونقسم الطرفين على } ١$$

$$\therefore ٤ = ٥ - ن$$

$$\therefore ٠ = ٤ + ن$$

$$\therefore (١ - ن) (٤ - ن) = ٠ \quad \text{أي أن: } ن = ١ \text{ ثانية أو } ن = ٤ \text{ ثانية.}$$

**تفسير وجود جوابين:** القذيفة تصل إلى ارتفاع ١٩,٦ مترًا بعد ثانية واحدة، ثم تستمر في الحركة لأعلى حتى تصل لأقصى ارتفاع، ثم تعود إلى نفس الارتفاع مرة أخرى بعد ٤ ثوانٍ من لحظة إطلاقها.

### حاول أن تحل

- ٢ **الربط بالألعاب الرياضية:** في إحدى الألعاب الأولمبية قفز متسابق من منصة ارتفاعها ٩,٨ أمتار عن سطح الماء عاليًا مبتعدًا عنها، فإذا كان ارتفاع المتسابق عن سطح الماء ف مترًا بعد زمن قدره ن ثانية يتحدد بالعلاقة:  
 $ف = ٤,٩ - ٢ + ٩,٨ + ٤,٩$ ، فأوجد لأقرب رقمين عشريين متى يصل المتسابق لسطح الماء؟

### نشاط

قم بزيارة المواقع الآتية:



### تمارين (١ - ١)

أولاً: الاختيار من متعدد

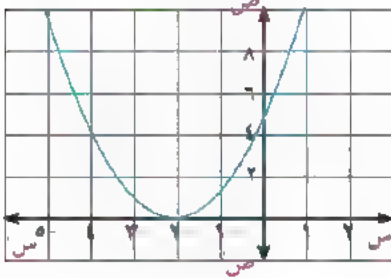
- ١ المعادلة:  $(س - ١) (س + ٢) = ٠$  من الدرجة:  
 أ الأولى ب الثانية ج الثالثة د الرابعة
- ٢ مجموعة حل المعادلة  $س^٢ = س$  في ح هي:  
 أ {٠} ب {١} ج {-١, ١} د {١, ٠}

٢) مجموعة حل المعادلة  $s^2 + 3 = 0$  في ح هي:

- أ {3-} ب {3√-} ج {3√} د  $\phi$

٣) مجموعة حل المعادلة  $s^2 - 2s - 1 = 0$  في ح هي:

- أ {1-} ب  $\phi$  ج {1، -1} د {1}



٤) يمثل الشكل المقابل المنحنى البياني لدالة تربيعية د.

مجموعة حل المعادلة  $D(s) = 0$  في ح هي:

- أ {2-} ب {4} ج  $\phi$  د {4، 2-}

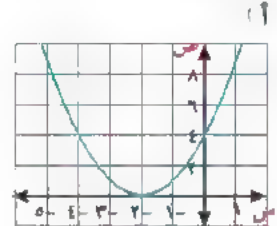
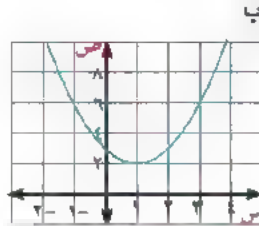
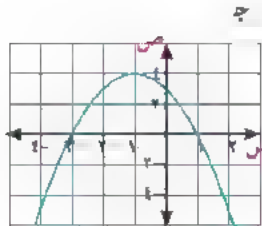
ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

٦) أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية في ح:

- أ  $s^2 - 1 = 0$  ب  $s^2 + 3s = 0$  ج  $s^2 = (s-4)^2$   
د  $s^2 - 6s + 9 = 0$  هـ  $s^2 + 9 = 0$  و  $s(s+1)(s-1) = 0$

٧) يبين كل شكل من الأشكال الآتية الرسم البياني لدالة من الدرجة الثانية.

أوجد مجموعة الحل للمعادلة  $D(s) = 0$  في كل شكل.



٨) أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية في ح وحقق الناتج بيانياً:

- أ  $s^2 + 3s + 4 = 0$  ب  $s^2 - 3 = 5s$  ج  $s^2 - 6 = 5s$   
د  $s^2 - 3 = 5s$  هـ  $s^2 + 2 = 12s$  و  $s^2 - \frac{1}{4} = \frac{2}{5}s$

٩) حل المعادلات الآتية في ح باستخدام القانون العام مقرباً الناتج لرقم عشري واحد.

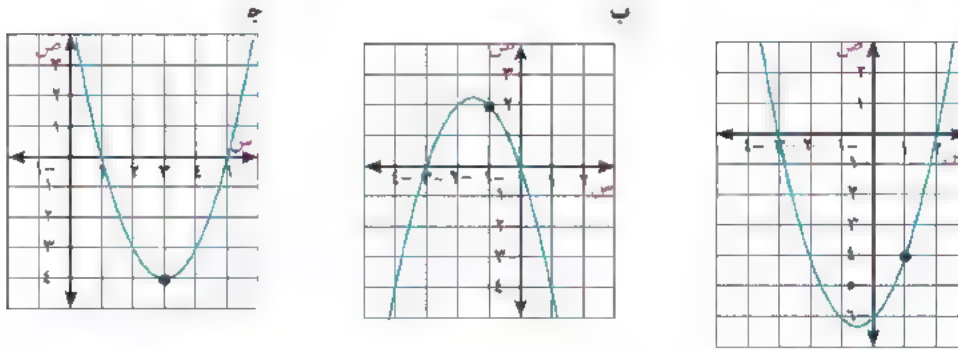
- أ  $s^2 - 65 = 0$  ب  $s^2 - 6s + 7 = 0$  ج  $s^2 + 6s + 8 = 0$   
د  $s^2 + 6s + 8 = 0$  هـ  $s^2 - 3s - 1 = 0$  و  $s^2 + 3s - 4 = 0$



١٠ أعداد: إذا كان مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية  $(1 + 2 + 3 + \dots + n)$  يعطى بالعلاقة  $\frac{n}{4} = (n + 1)$  فكم عددًا صحيحًا متتاليًا بدءًا من العدد ١ يكون مجموعها مساويًا:

- ١ ٧٨      ب ١٧١  
ج ٢٥٣      د ٤٦٥

١١ يبين كل شكل من الأشكال الآتية الرسم البياني لدالة من الدرجة الثانية في متغير واحد. أوجد قاعدة كل دالة من هذه الدوال.



١٢ اكشف الخطأ: أوجد مجموعة حل المعادلة  $(3 - s)^2 = (3 - s)$ .

إجابة كريم

$$\begin{aligned} \therefore (3 - s)^2 &= (3 - s) \\ \therefore (3 - s)^2 - (3 - s) &= 0 \\ \therefore (3 - s)[(3 - s) - 1] &= 0 \\ \text{بالتبسيط: } 3 - s &= 0 \text{ أو } s - 4 = 0 \\ \text{مجموعة الحل} &= \{4, 3\} \end{aligned}$$

إجابة زياد

$$\begin{aligned} \therefore (3 - s)^2 &= (3 - s) \\ \text{بقسمة الطرفين على } (3 - s) &\text{ حيث } s \neq 3 \\ \therefore s - 3 &= 1 \text{ وبالتبسيط} \\ \therefore s &= 4 \\ \text{مجموعة الحل} &= \{4\} \end{aligned}$$

أي الحلين صحيح؟ لماذا؟

١٣ بهكير نافذ: قُذفت كرة رأسياً إلى أعلى بسرعة (ع) تساوي ٢٩,٤ متر/ث. احسب الفترة الزمنية (ن) بالثانية التي تستغرقها الكرة حتى تصل إلى ارتفاع (ف) متراً، حيث ف تساوي ٣٩,٢ متراً علماً بأن العلاقة بين ف، ن تُعطى كالآتي  $F = 4,9N^2$ .

## مقدمة عن الأعداد المركبة

### Complex Numbers

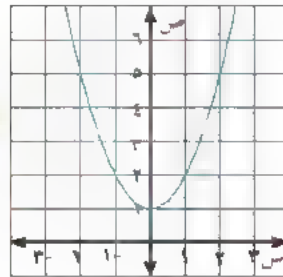
١ - ٢

سوف تتعلم



- مفهوم العدد التخييل
- دوى ت لصحيه
- مفهوم العدد المركب
- ساوى عددين مركبين
- العمليات على الأعداد المركبة

سبق أن درست نظامًا مختلفًا للأعداد، وهي نظام الأعداد الطبيعية "ط" ونظام الأعداد الصحيحة "ص" ونظام الأعداد النسبية "ن" وغير النسبية "ر" وأخيرًا نظام الأعداد الحقيقية "ح" ورأينا أن أى نظام يتشأ كتوسيع للنظام الذى يسفه لحل معادلات جديدة لم تكن قابلة للحل فى النظام السابق، وإذا تأملنا المعادلة  $x^2 = -1$  نجد أنها غير قابلة للحل فى ح، إذ لا يوجد عدد حقيقى مربعه يساوى (-1) يحقق المعادلة؛ لذا نحتاج لدراسة مجموعة جديدة من الأعداد تسمى مجموعة الأعداد المركبة.



يبين الشكل المجاور: التمثيل البياني للدالة  $y = x^2 + 1$  نلاحظ من الرسم أن منحنى الدالة لا يقطع محور السينات؛ وبذلك لا يكون للمعادلة  $x^2 + 1 = 0$  حلول حقيقية. لذا كان من الضروري التفكير فى مجموعة جديدة للأعداد لحل هذا النوع من المعادلات.

### المصطلحات الأساسية

- Imaginary Number عدد تخيل
- Complex Number عدد مركب

### Imaginary number

### العدد التخيلى

يعرف العدد التخيلى ت بأنه العدد الذى مربعه يساوى (-1)

أى أن:  $i^2 = -1$  وله الخاصية  $i^3 = -i$   $i^4 = 1$  لكل  $i \in \mathbb{C}$  وتسمى الأعداد التى على الصورة  $a + bi$ ،  $a, b \in \mathbb{R}$  بالأعداد التخيلىة

### الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

بذلك نكتب  $i^3 = -i$

$i^4 = 1$  وهكذا.....

يمكن يلمح: إذا كان  $a, b$  عددين حقيقيين سالبين، فهل من الممكن أن يكون  $i^2 = -1$ ؟ فسر ذلك بمثال عددي.

للحظ:

ت يرمز لها بالرمز  $i$

Integer powers of  $i$  قوى  $i$  الصحيحة:

العدد  $i$  يحقق قوانين الأسس التي سبق لك دراستها، ويمكن التعبير عن القوى المختلفة للعدد  $i$  كالآتي:

$$\begin{aligned} i^0 &= 1 & i^1 &= i & i^2 &= -1 & i^3 &= -i & i^4 &= 1 \\ i^5 &= i & i^6 &= -1 & i^7 &= -i & i^8 &= 1 & i^9 &= i \end{aligned}$$

وبوجه عام فإن:  $i^{4n} = 1$  ،  $i^{4n+1} = i$  ،  $i^{4n+2} = -1$  ،  $i^{4n+3} = -i$  حيث  $n$  صحه

مثال

① أوجد كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

$$1 \text{ ت } i^3 \quad \text{ب ت } i^5 \quad \text{ج ت } i^{11} \quad \text{د ت } i^{10}$$

الحل

$$\begin{aligned} \text{أ ت } i^3 &= i^2 \times i^1 = -1 \times i = -i & \text{ب ت } i^5 &= i^4 \times i^1 = 1 \times i = i \\ \text{ج ت } i^{11} &= i^{10} \times i^1 = (i^4)^2 \times i^1 = 1^2 \times i = i & \text{د ت } i^{10} &= i^8 \times i^2 = (i^4)^2 \times (-1) = 1^2 \times (-1) = -1 \end{aligned}$$

حاول أن تحل

① أوجد كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

$$1 \text{ ت } i^4 \quad \text{ب ت } i^7 \quad \text{ج ت } i^2 \quad \text{د ت } i^1 \quad \text{ه ت } i^{10} \quad \text{و ت } i^{12}$$

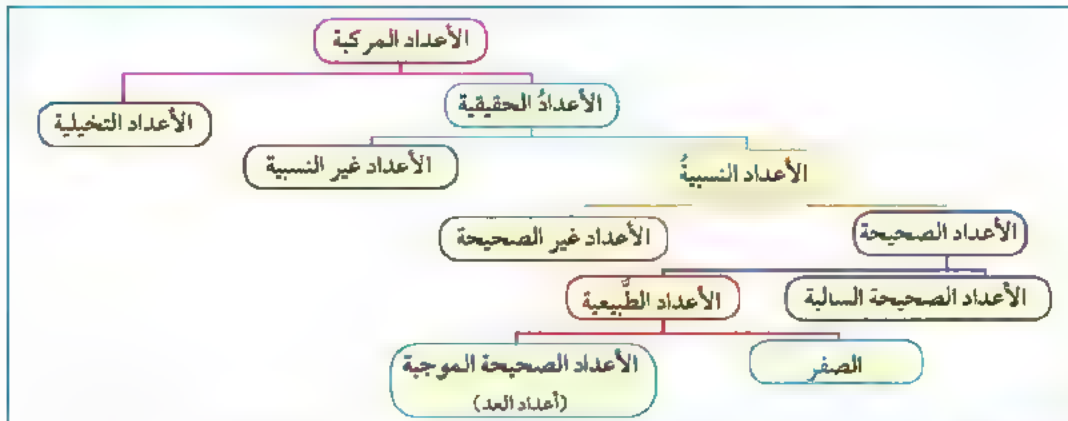
Complex number

العدد المركب

العدد المركب

$$\begin{array}{c} a + bi \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{الجزء} \quad \text{الجزء} \\ \text{الحقيقي} \quad \text{التخيلي} \end{array}$$

العدد المركب هو العدد الذي يمكن كتابته على الصورة  $a + bi$  حيث  $a, b$  عددا حقيقيان. و يبين الشكل التالي مجموعات الأعداد التي تُشكل جزءاً من نظام العدد المركب.





إذا كان  $a, b$  عددين حقيقيين فإن العدد  $c$  حيث  $c = a + b$  يسمى عددًا مركبًا، وتسمى  $a$  بالجزء الحقيقي للعدد المركب  $c$ ،  $b$  بالجزء التخيلي للعدد المركب  $c$ .

و إذا كانت  $b = 0$  فإن العدد  $c = a$  يكون حقيقيًا، وإذا كانت  $a = 0$  فإن العدد  $c = b$  يكون تخيليًا حيث  $b \neq 0$ .

## مثال

٢ حل المعادلة  $9س^2 + ١٢٥ = ٦١$

الحل

المعادلة  $9س^2 + ١٢٥ = ٦١$

$9س^2 + ١٢٥ - ٦١ = ١٢٥ - ٦١$  بإضافة  $(-١٢٥)$  إلى طرفي المعادلة

$9س^2 - ٦٤ = ٠$  يقسم طرفي المعادلة على ٩

$س^2 - \frac{٦٤}{٩} = ٠$

$س = \pm \sqrt{\frac{٦٤}{٩}}$  بأخذ الجذر التربيعي

$س = \pm \frac{\sqrt{٦٤}}{٣}$  تعريف العدد المركب

## حاول أن تحل

٢ حل كلًا من المعادلات الآتية:

أ  $٣س^2 + ٢٧ = ٠$

ب  $٥س^2 + ٢٤٥ = ٠$

ج  $٤س^2 + ١٠٠ = ٧٥$

Equality of two complex numbers

تساوي عددين مركبين

يتساوى العددان المركبان إذا فقط إذا تساوى الجزآن الحقيقيان وتساوى الجزآن التخيليان.

إذا كان:  $a + b$   $c + d$  فإن:  $a = c$  ،  $b = d$  والعكس صحيح

## مثال

٢ أوجد قيمتي  $س$ ،  $ص$  اللتين تُحققان المعادلة:  $٢س - ص + (٢ص - ٥) = ٥ + ٢$  حيث  $س$ ،  $ص \in \mathbb{C}$ ،  $١ = -١$

الحل

بمساواة الجزأين الحقيقيين أحدهما بالآخر وكذلك الجزأين التخيليين أحدهما بالآخر

$٢س - ص = ٥$  ،  $٢ص - ٥ = ١$

$س = ٣$  ،  $ص = ١$

محل المعدلين يتحقق

## حاول أن تحل

٢ أوجد قيمتي  $س$ ،  $ص$  اللتين تُحققان كل من المعادلات الآتية:

ب  $٢س - ٣ + (٣ص + ١) = ١٠ + ٧$

أ  $٢س + (١ + ٤ص) = ١٢ - ٥$

## Operations on complex numbers

## العمليات على الأعداد المركبة

يمكن استخدام خواص الإبدال والتجميع والتوزيع عند جمع أو ضرب الأعداد المركبة، كما توضح ذلك الأمثلة التالية.

مثال

④ أوجد في أبسط صورة ناتج كل مما يأتي:

$$١ \quad (٤-٧) + (٢-٤) \quad ب \quad (٣+٢)(٤-٣)$$

الحل

$$١ \quad \text{المقدار} \quad = (٤-٧) + (٢-٤)$$

باستخدام خاصيتي الإبدال والتجميع  
بالتبسيط

$$= (١+٤) + (٢+٧) - ٣ - ٩$$

$$ب \quad \text{المقدار} \quad = (٣+٢)(٤-٣)$$

باستخدام خاصية التوزيع

$$= ٢(٤-٣) + ٣(٤-٣)$$

بفك الأقواس

$$= ٨ - ٦ + ١٢ - ٩$$

حيث  $٢ = ١ - ١$

$$= ٨ - ٦ + ١٢ - ٩$$

$$= (١٢+٨) + (٩-٦) = ١٨ + ٣$$

بالتبسيط

حاول أن تحل

④ أوجد في أبسط صورة ناتج كل مما يأتي:

$$١ \quad (١٢-٥) - (٧-٩) \quad ب \quad (٣-٤)(٣+٤) \quad ج \quad (٦-٥)(٢+٣)$$

## Conjugate Numbers

## العددان المترافقان

العددان المركبان  $a + bi$  و  $a - bi$  يسميان بالعددين المترافقين فمثلاً  $٤ + ٣i$  و  $٤ - ٣i$  عددان مترافقان، حيث:

$$(١) \quad (٣-٤)(٣+٤) = (٣+٤) - (٤) = ٩ - ١٦ = -٧$$

$$٢٥ = (١-٩) - ١٦ = ٩ - ١٦ = -٧ \quad (\text{الناتج عدد حقيقي})$$

$$(٢) \quad ٨ = (٣+٤) + (٣-٤) \quad (\text{الناتج عدد حقيقي})$$

بمكير باهد:

هل بالضرورة أن يكون مجموع العددين المترافقين هو دائماً عدداً حقيقياً؟ فسر ذلك.

هل بالضرورة أن يكون حاصل ضرب العددين المترافقين هو دائماً عدداً حقيقياً؟ فسر ذلك.

## مثال

٥) أوجد قيمتي  $s$ ،  $t$  اللتين تحققان المعادلة:

$$\frac{(t+2)(t-2)}{t^2+3} - s - t = 0$$

الحل

بفك الأقواس

$$\frac{t^2-4}{t^2+3} - s - t = 0$$

بضرب البسط والمقام في مرافق المقام  $(t^2+3)$

$$t^2-4 - s(t^2+3) - t(t^2+3) = 0$$

بالتبسيط

$$t^2-4 - s(t^2+3) - t^3-3t = 0$$

بتطبيق تساوي عددين مركبين

$$t^2-4 = s(t^2+3) + t^3+3t$$

$$t^2-4 = s(t^2+3) + t^3+3t$$

حاول أن تحل

٥) أوجد في أبسط صورة قيمة كل مما يأتي:

$$\frac{t^2+3}{t^2+3}$$

٥

$$\frac{t^2-4}{t^2+3}$$

٥

$$\frac{t^2-4}{t^2+3}$$

٥

$$\frac{t^2-4}{t^2+3}$$

## مثال

٦) كهرباء: أوجد شدة التيار الكهربائي الكلية المار في مقاومتين متصلتين على التوالي في دائرة كهربية مغلقة، إذا كانت شدة التيار في المقاومة الأولى  $5-3$  أمبير وفي المقاومة الثانية  $2+t$  أمبير (علماً بأن شدة التيار الكلية تساوي مجموع شدتي التيار المار في المقاومتين).

الحل

∴ شدة التيار الكهربائي الكلية = مجموع شدتي التيار المار في المقاومتين.

$$= (5-3) + (2+t)$$

$$= (5-3) + (2+t)$$

$$= 2-7 \text{ ت أمبير}$$

حاول أن تحل

٦) إذا كانت شدة التيار الكهربائي الكلية المار في مقاومتين متصلتين على التوازي في دائرة كهربية مغلقة تساوي  $6+t$  أمبير، وكانت شدة التيار المار في إحدهما  $\frac{17}{t-1}$ ، فأوجد شدة التيار المار في المقاومة الأخرى.



١) تفكير ناقص: أوجد في أبسط صورة  $(١-ت)^٢$

### تمارين (١ - ٢)

١) ضع كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

أ  $١-٦٦$  ب  $١٥-٤٥$  ج  $٢٠-٤٠$  د  $١٠-٤٠$

٢) بسط كلاً مما يأتي:

أ  $\frac{١٢-٦ \times ١٨-٦}{١٢-٦ \times ١٨-٦}$  ب  $٢(٢-ت)$  ج  $(٤-ت)(٦-ت)$  د  $(٢-ت)^٢(٢-ت)^٢$

٣) أوجد ناتج كل مما يأتي في أبسط صورة:

أ  $(٢+٣)(٥-٢)$  ب  $(٤-٢٦)(٤-٢٦)$  ج  $(٢٥+٢٠)(٢٥-٩)$  د  $(٢٠-٩)(٢٠-٩)$

٤) ضع كلاً مما يأتي على صورة  $أ+ب$

أ  $(٢+٢)(٢-١)$  ب  $(٢+١)(٢+٢)(٢+٢)(٢+٢)$

٥) ضع كلاً مما يأتي على صورة  $أ+ب$

أ  $\frac{٢}{٢+١}$  ب  $\frac{٢+٤}{٢}$  ج  $\frac{٢-٢}{٢+٣}$  د  $\frac{(٢+٣)(٢-٣)}{٢٤-٣}$

٦) حل كل من المعادلات الآتية:

أ  $٣س+٢=١٢$  ب  $٤ص+٢=٢٠$  ج  $٤ع+٢=٧٢$  د  $\frac{٣}{٥}ص+٢=١٥$

٧) كهرباء: أوجد شدة التيار الكهربى الكلية المار فى مقاومتين متصلتين على التوازي فى دائرة كهربائية مغلقة إذا كانت شدة التيار فى المقاومة الأولى  $٤-٢$  أمبير، وفى المقاومة الثانية  $\frac{٣+٦}{٢+٢}$  أمبير

٨) إكتشف الخطأ: أوجد أبسط صورة للمقدار:  $(٢+٣)(٢-٣)$

إجابة كريم

$$\begin{aligned}(٢+٣)(٢-٣) &= (٢+٣)(٢-٣) \\ (٢+٣)(٢-٣) &= (٢+٣)(٢-٣) \\ (٢+٣)(٢-٣) &= (٢+٣)(٢-٣)\end{aligned}$$

إجابة أحمد

$$\begin{aligned}(٢+٣)(٢-٣) &= (٢+٣)(٢-٣) \\ (٢+٣)(٢-٣) &= (٢+٣)(٢-٣) \\ (٢+٣)(٢-٣) &= (٢+٣)(٢-٣) \\ (٢+٣)(٢-٣) &= (٢+٣)(٢-٣)\end{aligned}$$

أى الحلين صحيح؟ لماذا؟...

## تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية

### Determining the Types of Roots of a Quadratic Equation

٣ - ١

سوف تتعلم



٤ كيفية تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية

سبق أن درست حل معادلة الدرجة الثانية (المعادلة التربيعية) فى متغير واحد فى ح؛ وعلمت من خلال حل المعادلة أن عدد حلولها الحقيقية إما أن يكون حلين أو حلاً وحيداً مكرراً، أو لا يوجد حل للمعادلة فى ح، فهل يمكنك إيجاد عدد جذور (حلول) معادلة الدرجة الثانية فى ح دون حلها؟

Discriminant

المميز

جذرا المعادلة التربيعية  $أس^٢ + ب س + ج = ٠$  حيث  $ا \neq ٠$ ،  $ا$ ،  $ب$ ،  $ج \in \mathbb{R}$

$$\text{هما: } \frac{-ب - \sqrt{ب^٢ - ٤ا ج}}{٢ا} , \frac{-ب + \sqrt{ب^٢ - ٤ا ج}}{٢ا}$$

وكلا الجذرين يحتوى على المقدار  $ب^٢ - ٤ا ج$ .

يسمى المقدار  $ب^٢ - ٤ا ج$  مميز المعادلة التربيعية، ويستخدم لتحديد نوع جذرى المعادلة.

المصطلحات الأساسية

Root	٤ جذر
Discriminant	٤ مميز

مثال

١. حدد نوع جذرى كل من المعادلات الآتية:

$$س^٢ + ٣س + ١ = ٠$$

$$١س^٢ + ٧س - ١ = ٠$$

$$٣س^٢ + ٥س - ٣٠ = ٠$$

الحل

لتحديد نوع الجذرين:

$$١ = ا، ٥ = ب، ١ = ج، ٧ = د$$

المميز  $ب^٢ - ٤ا ج$

$$١٤١ = (٧)٥ - ٤(١)١ =$$

∴ المميز موجب لذلك يوجد جذران حقيقيان مختلفان.

$$١ = ا، ١ = ب، ٢ = ج، ١ = د$$

المميز  $ب^٢ - ٤ا ج$

$$٠ = ١ \times ١ - ٤(١)٢ =$$

∴ المميز يساوى صفراً، إذن الجذران حقيقيان ومتساويان.

الأدوات والوسائل

٤ آلة حاسبة علمية

دار الكتب الجامعية

كتاب الطالب - المصل الدراسي الأول

المميز = ب<sup>2</sup> - ٤أج

$$٣٠ = ب^2 - ٤أج$$

$$٩٥ = ٣٠ - ١ - ٤ = ٢٥$$

∴ المميز سالب، إذن يوجد جذران مركبان مترافقان (غير حقيقيين).

لاحظ أن

المميز	نوع الجذرين	شكل تخطيطي للدالة المرتبطة بالمعادلة
ب <sup>2</sup> - ٤أج < ٠	جذران حقيقيان مختلفان	
ب <sup>2</sup> - ٤أج = ٠	جذر حقيقي واحد مكرر (جذران متساويان)	
ب <sup>2</sup> - ٤أج > ٠	جذران مركبان مترافقان (غير حقيقيين)	

دعنا نحل

١) عيّن جذري كل معادلة من المعادلات التربيعية الآتية :

$$١٢س - ٤س' = ٩$$

$$٥س(س + ٥) = ٢(س - ٧)$$

$$١٥س' = ١٩س - ١٥$$

$$٥ = (س - ٢)س$$

مثال

٢) أثبت أن جذري المعادلة ٢س<sup>٢</sup> + ٣س + ٢ = ٠ مركبان وغير حقيقيين، ثم استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين.

الحل

$$٢ = أ، ب = -٣، ج = ٢$$

∴ المميز = ب<sup>2</sup> - ٤أج

∴ المميز سالب

$$٧ = -١٦ - ٩ = ٢ × ٢ × ٤ = ١٦$$

∴ يوجد جذران مركبان (غير حقيقيين).

$$\frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤أج}}{٢أ} = س$$

$$س = \frac{-٣ \pm \sqrt{٩ - ١٦}}{٢ \times ٢} = \frac{-٣ \pm \sqrt{-٧}}{٤}$$

$$س = \frac{-٣ + \sqrt{-٧}}{٤} \text{ و } س = \frac{-٣ - \sqrt{-٧}}{٤}$$



**مفكير نامد:** هل بالضرورة أن يكون جذرا المعادلة التربيعية في مجموعة الأعداد المركبة عددين مترافقين؟ وضح بمثال من عندك

حاول أن تحل

أثبت أن جذري المعادلة  $x^2 - 11x + 0 = 0$  مركبان، ثم استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين.

مثال

٢. إذا كان جذرا المعادلة  $x^2 + 2(ك-١)x + ٩ = ٠$  متساويين، فأوجد قيم ك الحقيقية، ثم تحقق من صحة الناتج:

الحل

التحقيق: عندما  $ك = ٤$   
تصبح المعادلة:  $x^2 + ٦x + ٩ = ٠$   
ويكون لها جذران متساويان هما:  $-٣, -٣$   
التحقيق: عندما  $ك = ٢$   
تصبح المعادلة:  $x^2 - ٦x + ٩ = ٠$   
ويكون لها جذران متساويان هما:  $٣, ٣$

ب  $ك = ٤$  أو  $ك = ٢$   
 $٤(١-ك) - ٩ \times ٩ = ٠$   
 $٤ك^2 - ٨ك - ٣٢ = ٠$   
 $ك^2 - ٢ك - ٨ = ٠$   
 $(ك-٤)(ك+٢) = ٠$   
 $ك = ٤$  أو  $ك = ٢$

حاول أن تحل

٢. إذا كان جذر المعادلة  $x^2 - ٢كx + ٧ك - ٦ = ٠$  متساويين، فأوجد قيم ك الحقيقية، ثم أوجد الجذرين.

### تمارين (١ - ٣)

أولاً: اختيار من متعدد:

١. يكون جذرا المعادلة  $x^2 - ٤x + ٠ = ٠$  متساويين إذا كانت:  
أ  $ك = ١$  ب  $ك = ٤$  ج  $ك = ٨$  د  $ك = ١٦$
٢. يكون جذرا المعادلة  $x^2 - ٢x + م = ٠$  حقيقيين مختلفين إذا كانت:  
أ  $م = ١$  ب  $م > ١$  ج  $م < ١$  د  $م = ٤$
٣. يكون جذرا المعادلة  $x^2 - ١٢x + ٩ = ٠$  مركبين غير حقيقيين إذا كانت:  
أ  $ل < ٤$  ب  $ل > ٤$  ج  $ل = ٤$  د  $ل = ١$

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

٤. حدد عدد الجذور وأنواعها لكل معادلة من المعادلات التربيعية الآتية:  
أ  $x^2 - ٢x + ٥ = ٠$  ب  $x^2 + ١٠x - ٤ = ٠$   
ج  $x^2 - ١٠x + ٢٥ = ٠$  د  $x^2 - ١٩x + ٣٥ = ٠$   
هـ  $(١١-س)س(٦-س) = ٠$  و  $(١-س)(٧-س) = (٣-س)(٤-س)$

٥ أوجد حل كل من المعادلات الآتية في مجموعة الأعداد المركبة باستخدام القانون العام.

أ س<sup>٢</sup> + ٤س + ٥ = ٠      ب س<sup>٢</sup> + ٦س + ٥ = ٠

ج س<sup>٢</sup> - ٧س + ٦ = ٠      د س<sup>٢</sup> - ٤س - ١ = ٠

٦ أوجد قيمة ك في كل من الحالات الآتية:

أ إذا كان جذرا المعادلة س<sup>٢</sup> + ٤س + ك = ٠ حقيقيين مختلفين.

ب إذا كان جذرا المعادلة س<sup>٢</sup> - ٣س + ٢ +  $\frac{1}{3}$  = ٠ متساويين.

ج إذا كان جذرا المعادلة ك س<sup>٢</sup> - ٨س + ١٦ = ٠ مركبين غير حقيقيين.

٧ إذا كان ل، م عددين نسييين، فأثبت أن جذرى المعادلة: ل س<sup>٢</sup> + (ل - م) س - م = ٠ عددان نسييان.

٨ يقدر عدد سكان جمهورية مصر العربية عام ٢٠١٣ بالملاقة:

ع = ن<sup>٢</sup> + ١,٢ ن + ٩١ حيث (ع) عدد السكان بالمليون، (ن) عدد السنوات

أ كم كان عدد السكان عام ٢٠١٣

ب قدر عدد السكان عام ٢٠٢٣

ج قدر عدد السنوات التي يبلغ عدد السكان فيها ٣٣٤ مليوناً.

د اكتب مقالاً توضح فيه أسباب الزيادة المطردة في عدد السكان وكيفية علاجها.

٩ **اكتشف الخطأ:** ما عدد حلول المعادلة س<sup>٢</sup> - ٦س + ٥ = ٠ في ح

**إحانة كريم**

$$\text{ب}^2 - ٦\text{ب} + ٥ = ٠ \Rightarrow (٦ - ٢) - ٢ \times ٤ = (٥ - ٠)$$

$$٧٦ = ٤٠ + ٣٦ =$$

المميز موجب، فيوجد حلان حقيقيان مختلفان

**إجابة أحمد**

$$\text{ب}^2 - ٦\text{ب} + ٥ = ٠ \Rightarrow (٦ - ٢) - ٢ \times ٤ = ٥ \times ٢ \times ٤$$

$$٤ = ٤٠ - ٣٦ =$$

المميز سالب، فلا توجد حلول حقيقية

١٠ إذا كان جذرا المعادلة س<sup>٢</sup> + ٢ (ك - ١) س + (٢ك + ١) = ٠ متساويين، فأوجد قيم ك الحقيقية، ثم أوجد الجذرين.

١١ **بفكيرنا فقط:** حل المعادلة ٣٦ س<sup>٢</sup> - ٤٨ س + ٢٥ = ٠ في مجموعة الأعداد المركبة.

## ١ - ٤

### العلاقة بين جذري معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها

#### The Relation Between Two Roots of the Second Degree Equation and the Coefficients of its Terms

##### سوف نتعلم

- ١ كيفية إيجاد مجموع الجذرين لمعادلة تربيعية معطاة.
- ٢ كيفية إيجاد حاصل ضرب الجذرين
- ٣ إيجاد معادلة تربيعية بمعلومية معادلة تربيعية أخرى



نعلم أن جذري المعادلة  $x^2 - 8x + 3 = 0$  هما  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{2}{3}$

مجموع الجذرين  $2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3+1}{3}$

حاصل ضرب الجذرين  $\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$

هل توجد علاقة بين مجموع جذري المعادلة ومعاملات حدودها؟

هل توجد علاقة بين حاصل ضرب جذري المعادلة ومعاملات حدودها؟

#### مجموع الجذرين وحاصل ضربهما

##### Sum and multiply of two roots

##### المصطلحات الأساسية

- ١ مجموع جذرين Sum of Two Roots
- ٢ حاصل ضرب جذرين Product of Two Roots

جذرا المعادلة التربيعية  $ax^2 + bx + c = 0$  هما:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

وباعتبار أن الجذر الأول  $x_1$ ، الجذر الثاني  $x_2$  فإن:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad (\text{أثبت ذلك}) \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} \quad (\text{أثبت ذلك})$$

نفس الشئ في المعادلة التربيعية  $ax^2 + bx + c = 0$

أوجد  $x_1 + x_2$  ،  $x_1 x_2$  في الحالات الآتية:

$$1 \text{ إذا كان } a=1 \quad 2 \text{ إذا كانت } b=1 \quad 3 \text{ إذا كان } a=1$$

##### مثال

١ دون حل المعادلة أوجد مجموع وحاصل ضرب جذري المعادلة:

$$x^2 + 5x - 12 = 0$$

##### الحل

$$a=1, b=5, c=-12$$

$$\text{مجموع الجذرين} = -\frac{b}{a} = -\frac{5}{1} = -5$$

$$\text{حاصل ضرب الجذرين} = \frac{c}{a} = \frac{-12}{1} = -12$$

### حاول أن تحل

- ١) دون حل المعادلة أوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى كل من المعادلات الآتية:
- أ)  $x^2 + 2x - 6 = 0$     ب)  $x^2 - 23x + 30 = 0$     ج)  $x^2 - (2+3)x + 6 = 0$

### مثال

- ٢) إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة  $x^2 - 2x + 3 = 0$  يساوى ١ فأوجد قيمة  $k$ ، ثم حل المعادلة.

### الحل

حاصل ضرب الجذرين  $= 1$      $\therefore \frac{k}{3} = 1$      $\therefore k = 3$

$1 = 2 - 3$ ، جـ  $2 = 1$

القانون العام:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{-2}}{2} = -1 \pm \sqrt{-2}$$

مجموعة حل المعادلة هي  $\left\{-1 + \sqrt{-2}, -1 - \sqrt{-2}\right\}$  ،  $\frac{3}{4}$  ،  $\frac{3}{4}$

### حاول أن تحل

- ٢) إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة  $x^2 + 3x - 10 = 0$  جـ  $0$  هو  $\frac{4}{3}$  فأوجد قيمة جـ، ثم حل المعادلة.
- ٣) إذا كان مجموع جذرى المعادلة  $x^2 + 2x - 5 = 0$  هو  $\frac{3}{4}$  فأوجد قيمة ب، ثم حل المعادلة.

### مثال

- ٢) إذا كان (١ + ت) هو أحد جذور المعادلة  $x^2 - 2x + 1 = 0$  حيث  $1 \in \mathbb{C}$  فأوجد:
- أ) الجذر الآخر    ب) قيمة  $\alpha$

### الحل

$1 = 1$  ،  $1 = 2 - 1$  ، جـ  $1$

$\therefore 1 + t$  هو أحد جذرى المعادلة

$\therefore$  الجذر الآخر  $= 1 - t$  لأن الجذرين مترافقان ومجموعهما  $= 2$

ب  $\therefore$  حاصل ضرب الجذرين  $= 1$

$\therefore (1+t)(1-t) = 1$

$\therefore 1 = 1 + 1$  ،  $\therefore 1 = 2$

### حاول أن تحل

- ٤) إذا كان (٢ + ت) هو أحد جذور المعادلة  $x^2 - 4x + 3 = 0$  حيث  $0 \in \mathbb{C}$  فأوجد:
- أ) الجذر الآخر    ب) قيمة ب



### تكوين المعادلة التربيعية متى علم جذورها

Forming the quadratic equation whose roots are known

بفرض أن ل، م هما جذرا المعادلة التربيعية:  $اس^2 + ب س + ج = ٠$  ،  $ا \neq ٠$

بقسمة طرفي المعادلة على ا:

$$٠ = \frac{ج}{ا} + س \frac{ب}{ا} + س^2$$

$$اي \quad س^2 - س \left( \frac{ب}{ا} \right) + \frac{ج}{ا} = ٠$$

∴ ل، م جذرا المعادلة التربيعية  $س^2 - س \left( \frac{ب}{ا} \right) + \frac{ج}{ا} = ٠$  ،  $ل + م = \frac{ب}{ا}$  ،  $ل م = \frac{ج}{ا}$

∴ المعادلة التربيعية التي جذورها ل، م هي:

$$س^2 - س(ل + م) + ل م = ٠$$

④ كون المعادلة التربيعية التي جذورها ٤، ٣-

الحل

ليكن جذرا المعادلة هما ل، م

∴  $ل + م = ٤ + (٣-) = ١$  ،  $ل م = (٣-) ٤ = -١٢$  ، ∴ صيغة المعادلة التربيعية هي:  $س^2 - س(ل + م) + ل م = ٠$

∴ المعادلة هي:  $س^2 - س - ١٢ = ٠$

مثال

⑤ كون المعادلة التربيعية التي جذورها  $\frac{٢+٢}{٢+١}$  ،  $\frac{٢-٢}{٢-١}$

الحل

ليكن جذرا المعادلة هما ل، م

$$ل = \frac{٢+٢}{٢+١} \times \frac{٢-١}{٢-١} = \frac{٤}{٢} = ٢$$

$$م = \frac{٢-٢}{٢-١} \times \frac{٢+١}{٢+١} = \frac{-١}{١} = -١$$

$$ل + م = ٢ - ١ = ١$$

$$ل م = ٢ \times -١ = -٢$$

∴ المعادلة التربيعية التي جذورها ل، م:  $س^2 - س(ل + م) + ل م = ٠$

∴  $س^2 - س - ٢ = ٠$

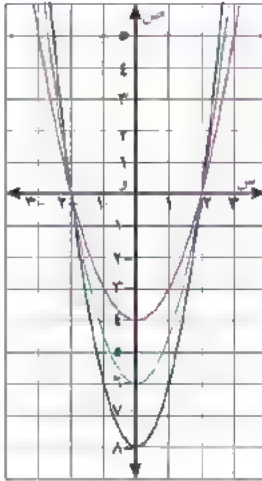
حاول أن تحل

⑤ كون المعادلة التربيعية في كل مما يأتي بمعلومية جذورها:

أ ٩- ، ٩

ب ٣ ، ٥

$$ج \frac{٣}{٢} ، \frac{٣+٣}{٢}$$



**تذكير هام:** الشكل المجاور يمثل مجموعة من منحنيات بعض الدوال التربيعية التي يمر كل منها بالنقطتين  $(-2, 0)$ ،  $(2, 0)$ . أوجد قاعدة كل دالة من هذه الدوال

### تكوين معادلة تربيعية بمعلومية معادلة تربيعية أخرى

Forming a quadratic equation from the roots of another equation

#### مثال

١) إذا كان  $ل$ ،  $م$  جذري المعادلة  $س^2 - 3س - 1 = 0$  فكون المعادلة التربيعية التي جذراها  $ل^2$ ،  $م^2$ .

#### الحل

المعادلة المعلومه بالتعويض عن  $ا = 1$ ،  $ب = -3$ ،  $ج = -1$ ؛  $ل + م = -\frac{ب}{ا} = 3$ ،  $ل \cdot م = \frac{ج}{ا} = -1$ ،  
المعادلة المطلوبة بالتعويض عن  $ل + م = 3$ ،  $ل \cdot م = -1$  في الصيغة  $ل^2 + م^2 - 2(ل \cdot م) = (ل + م)^2 - 2(ل \cdot م)$   
 $\therefore ل^2 + م^2 - 2(ل \cdot م) = (ل + م)^2 - 2(ل \cdot م)$   
 $\frac{13}{2} = \frac{9}{2} + \frac{2}{2} = 1 + \frac{9}{2}$

#### لاحظ أن

$$\begin{aligned} ل^2 + م^2 - 2(ل \cdot م) &= (ل + م)^2 - 2(ل \cdot م) \\ ل^2 + م^2 - 2(ل \cdot م) &= (ل - م)^2 \end{aligned}$$

$$ل^2 + م^2 = (ل + م)^2 - 2(ل \cdot م)$$

$$\frac{13}{2} = (3)^2 - 2(-1)$$

بالتعويض في صيغة المعادلة التربيعية:  $س^2 - (مجموع الجذرين)س + حاصل ضربيهما = 0$

بضرب طرفي المعادلة في 2

$\therefore$  المعادلة التربيعية المطلوبة هي:  $س^2 - 13س + 4 = 0$

#### حاول أن تحل

١) في المعادلة السابقة  $س^2 - 3س - 1 = 0$  كَوّن المعادلات التربيعية التي جذراها كل منها كالآتي:

ج:  $ل + م$ ،  $ل \cdot م$

ب:  $\frac{ل}{م}$ ،  $\frac{م}{ل}$

ا:  $\frac{ل}{م}$ ،  $\frac{م}{ل}$

#### ٤

١) في كل مما يأتي كون المعادلة التربيعية التي جذراها:

أ)  $س^2 - 3س + 3$ ،  $س^2 - 3س - 3$ ،  $س^2 - 3س + 3$

ب)  $س^2 - 3س + 3$ ،  $س^2 - 3س - 3$

ج)  $س^2 - 3س + 3$ ،  $س^2 - 3س - 3$

٢) إذا كان  $ل$ ،  $م$  هما جذرا المعادلة  $س^2 + 3س - 5 = 0$  فكون المعادلة التربيعية التي جذراها  $ل^2$ ،  $م^2$ .



### تمارين (١ - ٤)



أولاً: أكمل ما يأتي:

- ١) إذا كان  $s = 3$  أحد جذري المعادلة  $s^2 + m s - 27 = 0$  فإن  $m = \dots$  ، الجذر الآخر =
- ٢) إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة :  $s^2 + 7 s + 3 = 0$  يساوي مجموع جذري المعادلة:  $s^2 - (4 + k) s = 0$  فإن  $k = \dots$
- ٣) المعادلة التربيعية التي كل من جذريها يزيد ١ عن كل من جذري المعادلة  $s^2 - 3 s + 2 = 0$  هي
- ٤) المعادلة التربيعية التي كل من جذريها ينقص ١ عن كل من جذري المعادلة  $s^2 - 5 s + 6 = 0$  هي

ثانياً: الاختيار من متعدد

- ٥) إذا كان أحد جذري المعادلة  $s^2 - 3 s + 4 = 0$  ضعف الآخر فإن جـ تساوي  
 أ - ٤      ب - ٢      ج - ٢      د - ٤
- ٦) إذا كان أحد جذري المعادلة  $s^2 + 3 s + 2 = 0$  معكوساً ضربياً للآخر، فإن أ تساوي  
 أ  $\frac{1}{3}$       ب  $\frac{1}{2}$       ج  $\frac{2}{3}$       د  $\frac{3}{2}$
- ٧) إذا كان أحد جذري المعادلة  $s^2 - (3 - b) s + 5 = 0$  معكوساً جمعياً للآخر، فإن ب تساوي  
 أ - ٥      ب - ٣      ج - ٢      د - ٥

ثالثاً: أجب عن الأسئلة الآتية

- ٨) أوجد مجموع وحاصل ضرب جذري كل معادلة فيما يأتي:  
 أ  $s^2 + 19 s - 14 = 0$       ب  $s^2 + 4 s - 35 = 0$
- ٩) أوجد قيمة أ ثم أوجد الجذر الآخر للمعادلة في كل مما يأتي:  
 أ إذا كان:  $s = -1$  أحد جذري المعادلة  $s^2 - 2 s + 1 = 0$   
 ب إذا كان:  $s = 2$  أحد جذري المعادلة  $s^2 - 5 s + 1 = 0$
- ١٠) أوجد قيمة أ، ب في كل من المعادلات الآتية إذا كان:  
 أ  $s^2 + 2 s - 5 = 0$  جذرا المعادلة  $s^2 + 1 s + 3 = 0$   
 ب  $s^2 - 3 s + 7 = 0$  جذرا المعادلة  $s^2 - 1 s - 21 = 0$   
 ج  $s^2 + 1 s - \frac{3}{2} = 0$  جذرا المعادلة  $s^2 - 2 s + 3 = 0$   
 د  $s^2 - 3 s + 3 = 0$  جذرا المعادلة  $s^2 + 1 s + 3 = 0$

١١) ابحث نوع الجذرين لكل من المعادلات الآتية، ثم أوجد مجموعة حل كل منها:

أ  $x^2 + 2x - 35 = 0$       ب  $x^2 + 3x + 7 = 0$

ج  $x(x - 4) + 5 = 0$       د  $x^3 - 3(x - 8) + 16 = 0$

١٢) أوجد قيمة جـ التي تجعل جذرى المعادلة جـ  $x^2 - 12x + 9 = 0$  متساويين.

١٣) أوجد قيمة أ التي تجعل جذرى المعادلة  $x^2 - 3x + 2 + \frac{1}{x} = 0$  متساويين.

١٤) أوجد قيمة جـ التي تجعل جذرى المعادلة  $x^3 - 5x + ج = 0$  متساويين، ثم أوجد الجذرين.

١٥) أوجد قيمة ك التي تجعل أحد جذرى المعادلة  $x^3 + (ك - 1)x - 3 = 0$  هو المعكوس الجمعي للجذر الآخر.

١٦) أوجد قيمة ك التي تجعل أحد جذرى المعادلة:  $4x^3 + 7x + ك^2 + 4 = 0$  هو المعكوس الصربي للجذر الآخر.

١٧) كون معادلة الدرجة الثانية التي جذورها كالآتي:

أ  $1 - 2، 2 - 4$       ب  $5 - 5، 5 - 5$       ج  $\frac{3}{4}، \frac{2}{4}$

د  $1 - 3، 3 + 1$       هـ  $3 - 2\sqrt{2}، 2 + 2\sqrt{2}$

١٨) أوجد المعادلة التربيعية التي جذورها ضعفا جذرى المعادلة  $x^2 - 8x + 5 = 0$ .

١٩) أوجد المعادلة التربيعية التي كل من جذريها يزيد بمقدار ١ عن كل من جذرى المعادلة:  $x^2 - 7x - 9 = 0$ .

٢٠) أوجد المعادلة التربيعية التي كل من جذريها يساوى مربع نظيره من جذرى المعادلة:  $x^3 + 3x - 5 = 0$ .

٢١) إذا كان ل، م جذرى المعادلة  $x^2 - 7x + 3 = 0$  فأوجد معادلة الدرجة الثانية التي جذورها:

أ  $2ل، 2م$       ب  $ل + 2، م + 2$       ج  $\frac{ل}{م}، \frac{2}{ل}$       د  $ل + م، ل، م$

(٢٢) **مساحات:** قطعة أرض على شكل مستطيل بعدها ٦، ٩ من الأمتار، يراد مضاعفة مساحة هذه القطعة وذلك بزيادة طول كل بعد من أبعادها بنفس المقدار. أوجد المقدار المضاف.

٢٢) **نقد:** أوجد مجموعة قيم ج في المعادلة التربيعية  $٧س^٢ + ١٤س + ج = ٠$  بحيث يكون للمعادلة:

- ا** جذران حقیقیان مختلفان.  
**ب** جذران حقیقیان متساویان.  
**ج** جذران مرکبان.

٢٤. **اكتشف الخطأ:** إذا كان  $ل + ١$ ،  $م + ١$  هما جذرا المعادلة  $س^٢ + ٥س + ٣ = ٠$  فأوجد المعادلة التربيعية التي جذراها  $ل$ ،  $م$ .

## حل أميرة

$$\begin{aligned} 2 &= m, 5 = m + 3 \therefore \\ 2 + m + 3 &= (1 + m) + (1 + 3) \therefore \\ 2 + 5 &= 2 + 5 \\ 1 + (m + 3) + m &= (1 + m)(1 + 3) \therefore \\ 1 &= 1 + 3 - 3 = \\ \text{المعادلة هي: } 1 + 3 &= 2 \end{aligned}$$

## حل يوسف

$$\begin{aligned} 0 &= (1+m) + (1+l) \therefore \\ v &= m + l \therefore \quad 0 = 2 + m + l \therefore \\ r &= 1 + (m+l) + m \therefore \quad r = (1+m)(1+l) \therefore \\ q &= m \therefore \quad r = 1 + v - m \therefore \\ &= q + s + v \end{aligned}$$

المعادلة هي:  $s = r - v - q$

(٢٥) **بفكير بارع:** إذا كان الفرق بين جذري المعادلة  $x^2 + كx + ٢ = ٠$  يساوي ضعف حاصل ضرب جذري المعادلة  $x^2 + ٣x + ك = ٠$  فأوجد ك.



## إشارة الدالة

### Sign of the Function

٥ - ١

سوف تتعلم



سبق أن درست التمثيل البياني لدالة الدرجة الأولى ودالة الدرجة الثانية، وتعرفت على الشكل العام لمنحنى كل دالة. فهل يمكنك بحث إشارة كل من هذه الدوال؟ المقصود ببحث إشارة الدالة هو تحديد قيم المتغير  $x$  (مجال  $x$ ) التي تكون عندها قيم الدالة  $f(x)$  على النحو الآتي:

- موجبة، أي  $f(x) > 0$
- سالبة، أي  $f(x) < 0$
- مساوية للصفر  $f(x) = 0$



المصطلحات الأساسية

**أولاً: إشارة الدالة الثابتة** First: The sign of the Constant Function  
إشارة الدالة الثابتة  $f(x) = c$  (حيث  $c \neq 0$ ) هي نفس إشارة  $c$  لكل  $x \in \mathbb{R}$ .  
والشكل التالي يوضح إشارة الدالة  $f(x) = c$ .



- إشارة دالة  $f(x) = c$
- دالة ثابتة  $f(x) = c$
- دالة خطية (دالة الدرجة الأولى)  $f(x) = ax + b$
- دالة تربيعية (دالة الدرجة الثانية)  $f(x) = ax^2 + bx + c$
- Quadratic Function

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

١) عين إشارة كل من الدوال الآتية.

ب  $f(x) = -x$

أ  $f(x) = x$

الحل

أ. إشارة الدالة موجبة لكل  $x \in \mathbb{R}$

ب. إشارة الدالة سالبة لكل  $x \in \mathbb{R}$

ب. إشارة الدالة سالبة لكل  $x \in \mathbb{R}$

أ. إشارة الدالة موجبة لكل  $x \in \mathbb{R}$

حاول أن تحل

١ عيّن إشارة كل من الدوال الآتية:

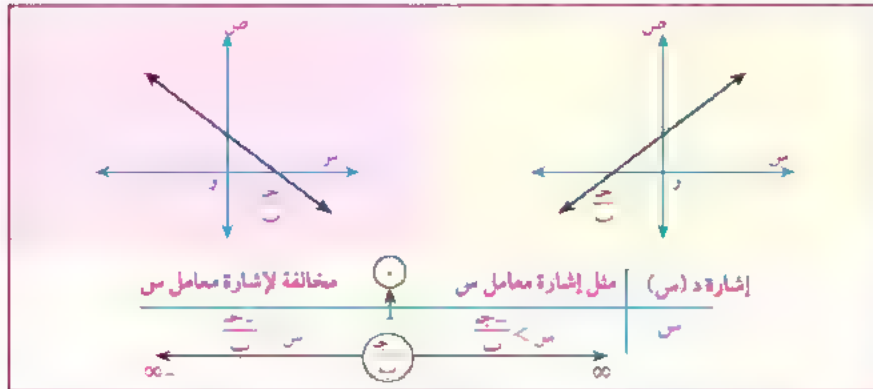
ب د(س) =  $\frac{5}{3}$

أ د(س) =  $\frac{2}{3}$

Second: Sign of the Linear Function

ثانيًا، إشارة دالة الدرجة الأولى (الدالة الخطية)

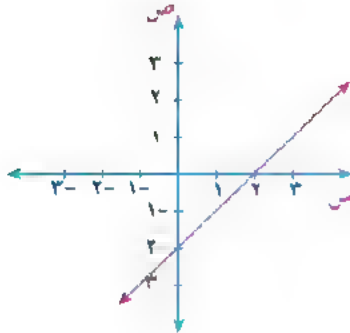
قاعدة الدالة د هي د(س) = ب س + جـ ، ب ≠ ٠ ،  
والشكل البياني التالي يوضح إشارة الدالة د.



مثال

٢ عيّن إشارة الدالة د حيث د(س) = س ٢ مع توضيح ذلك بيانيًا:

الحل



قاعدة الدالة: د(س) = س - ٢

رسم الدالة:

عندما د(س) = ٠ فإن س = ٢

عندما س = ٠ فإن د(س) = -٢

من الرسم نجد أن:

الدالة موجبة عندما س < ٢

الدالة د(س) = ٠ عندما س = ٢

الدالة سالبة عندما س > ٢

حاول أن تحل

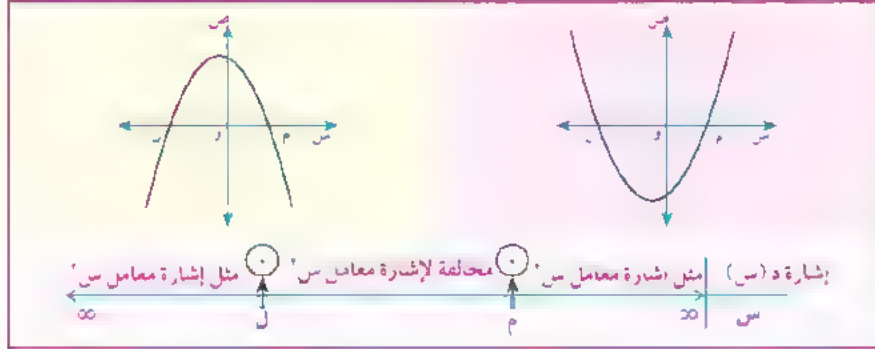
٢ عيّن إشارة الدالة د(س) = -٢ س - ٤ مع توضيح ذلك بيانيًا.

### Third: Sign of the Quadratic Function.

### ثالثاً: إشارة الدالة التربيعية

لتعيين إشارة الدالة التربيعية د، حيث  $D(s) = as^2 + bs + c$  نوجد مميز المعادلة  $as^2 + bs + c = 0$  فإذا كان:

أولاً:  $b^2 - 4ac < 0$  فإنه يوجد للمعادلة جذران حقيقيان ل، م، وبفرض أن  $l < m$  تكون إشارة الدالة كما في الأشكال الآتية:



### مثال

③ مثل بياناً د، حيث  $D(s) = s^2 - 2s - 3$  ثم عين إشارة الدالة د.

الحل

بتحليل المعادلة:  $s^2 - 2s - 3 = 0$

$$0 = (s - 3)(s + 1)$$

فيكون جذرا المعادلة: 3، -1

من الرسم نجد أن:

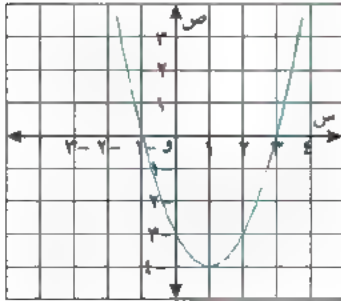
$$D(s) < 0 \text{ عندما } s \in (-1, 3)$$

$$D(s) > 0 \text{ عندما } s \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$$

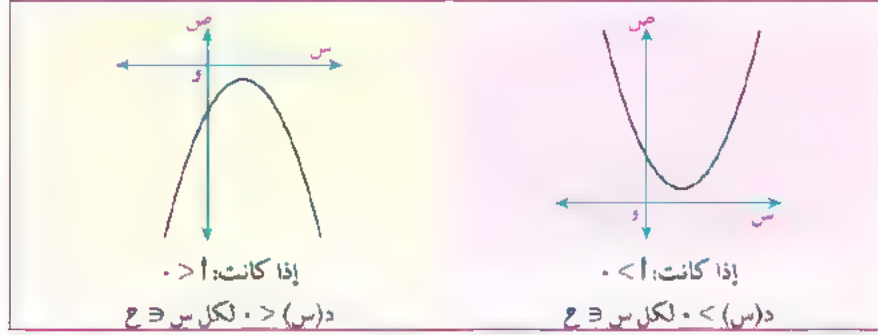
$$D(s) = 0 \text{ عندما } s \in \{-1, 3\}$$

هـ دور أن تحل

③ مثل بياناً د، حيث  $D(s) = s^2 - 6s + 6$  ثم عين إشارة الدالة د.



**ثانيًا** إذا كان  $b^2 - 4ac > 0$  فإنه لا توجد جذور حقيقية، وتكون إشارة الدالة د مثل إشارة معامل  $a$ ، والأشكال التالية توضح ذلك.



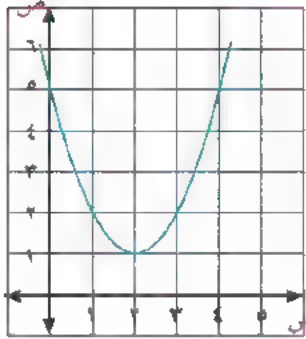
④ مثل بيانيًا د حيث  $d(س) = س^2 - ٤س + ٥$  ثم عين إشارة الدالة د.

**الحل**

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 - 20 = -4 < 0$$

$$= 16 - 20 = -4 < 0$$

لذلك فإن المعادلة  $س^2 - ٤س + ٥ = 0$  ليس لها جذور حقيقية إشارة الدالة موجبة لكل  $س \in ح$  (لأن معامل  $س^2$   $> 0$ )



**حاول أن تحل**

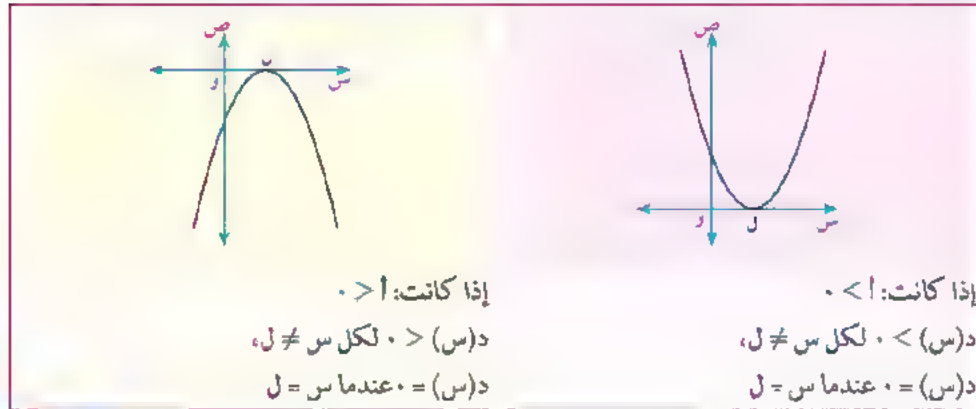
④ مثل بيانيًا د، حيث  $d(س) = -س^2 - ٢س - ٤$  ثم عين إشارة الدالة د.

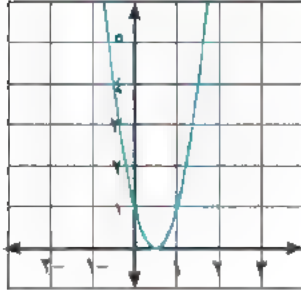
**ثالثًا** إذا كان  $b^2 - 4ac = 0$  فإنه يوجد للمعادلة جذران متساويان، وليكن كل منهما يساوي  $ل$ ، وتكون إشارة الدالة د كالآتي:

⚡ مثل إشارة  $a$  عندما  $س \neq ل$

⚡ مثل إشارة  $a$  عندما  $س \neq ل$

والأشكال الآتية توضح ذلك.





### مثال

٥) مثل بيانيًا د حيث  $د(س) = ٤س^٢ - ٤س + ١$ ، ثم عين إشارة الدالة د.

الحل

$$\text{المميز (ب) } \Delta = ٤ - ٤ \times ١ \times ٤ = ١٦ - ١٦ = ٠$$

$$\Delta = ١٦ - ١٦ = ٠$$

لذلك فإن المعادلة  $٤س^٢ - ٤س + ١ = ٠$  لها جذران متساويان.

بالتحليل:  $٠ = (١ - ٢س)^٢$

بوضع:  $٢س - ١ = ٠$  تكون  $س = \frac{١}{٢}$

د(س) < ٠ عندما  $س \neq \frac{١}{٢}$ ، د(س) = ٠ عندما  $س = \frac{١}{٢}$

دوال أن تحل

٥) مثل بيانيًا د، حيث  $د(س) = ٤س^٢ - ١٢س + ٩$ ، ثم عين إشارة الدالة د.

### مثال

٦) اثبت أنه لجميع قيم س  $\exists$  يكون جذرا المعادلة  $٢س^٢ - ٢س + ٣ - ك = ٠$  صفر حقيقيين مختلفين

الحل

$$\text{المميز (ب) } \Delta = ٤ - ٤ \times ٢ \times (٣ - ك) = ٤ - ٢٤ + ٨ك = ٨ك - ٢٠$$

يكون جذرا المعادلة حقيقيين مختلفين إذا كان المميز موجبا

نبحث إشارة المقدار  $ص = ٨ك - ٢٠$

فيكون مميز المعادلة  $٨ك - ٢٠ = ٠$  هو:

$$(٨) \quad ٨ \times ٢٤ = ١٩٢ = ٢٤ \times ٨ = ٢٤ \times ٨ = ١٩٢ > ٠$$

ليس لها جذور حقيقية

لذلك فإن المعادلة  $٨ك - ٢٠ = ٠$

موجبة لكل س  $\exists$  (لماذا؟)

ص =  $٨ك - ٢٠$

موجب لكل س  $\exists$  ع

فيكون مميز المعادلة  $٢س^٢ - ٢س + ٣ - ك = ٠$  صفر

حقيقتان مختلفتان لكل س  $\exists$  ع

جذرا المعادلة  $٢س^٢ - ٢س + ٣ - ك = ٠$



١) عين إشارة كل دالة من الدوال الآتية:

$$٣. د(س) = ٤س^٢$$

$$٣. د(س) = ٤س$$

$$٣. د(س) = ٢س$$

$$٩. د(س) = ٣س - ٢س^٢$$

$$٥. د(س) = ٤س + ٤س^٢$$

$$٥. د(س) = ١س^٢$$





## تمارين (١ - ٥)



أولاً، أكمل ما يأتي:

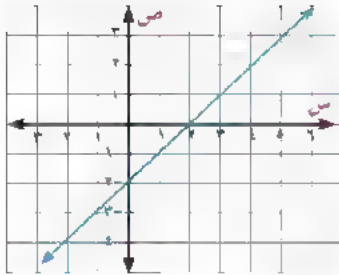
١ الدالة د، حيث د(س) = -٥ إشاراتها ..... في الفترة

٢ الدالة د، حيث د(س) = س<sup>٢</sup> + ١ إشاراتها ..... في الفترة٣ الدالة د، حيث د(س) = س<sup>٢</sup> - ٦ س + ٩ موجبة في الفترة

٤ الدالة د، حيث د(س) = س - ٢ موجبة في الفترة

٥ الدالة د، حيث د(س) = ٣ - س سالبة في الفترة

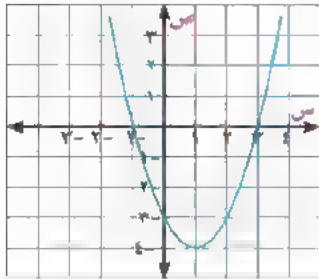
٦ الدالة د، حيث د(س) = - (س - ١) (س + ٢) موجبة في الفترة

٧ الدالة د، حيث د(س) = س<sup>٢</sup> + ٤ س - ٥ سالبة في الفترة

٨ الشكل المرسوم يمثل دالة من الدرجة الأولى في س:

أ د(س) موجبة في الفترة

ب د(س) سالبة في الفترة



٩ الشكل المرسوم يمثل دالة من الدرجة الثانية في س:

أ د(س) = ٠ عندما س = ٠

ب د(س) &lt; ٠ عندما س = ٠

ج د(س) &gt; ٠ عندما س = ٠

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

١٠ في التمارين من ١ إلى ٦ عین إشارة كل من الدوال الآتية:

أ د(س) = ٢ ..... ب د(س) = ٢ س

ج د(س) = -٣ س ..... د د(س) = ٢ س + ٤

هـ د(س) = ٣ - ٢ س ..... و د(س) = س<sup>٢</sup>ز د(س) = ٢ س<sup>٢</sup> ..... ح د(س) = س<sup>٢</sup> - ٤

$$\begin{array}{ll}
 \text{ط د (س)} = 1 - \text{س}^2 & \text{ي د (س)} = (\text{س} - 2)(\text{س} + 3) \\
 \text{ك د (س)} = (2 - \text{س})(3 - \text{س})^2 & \text{ل د (س)} = \text{س}^2 - \text{س} - 2 \\
 \text{م د (س)} = \text{س}^2 - 8\text{س} + 16 & \text{ن د (س)} = -\text{س}^4 + \text{س}^3 + 10\text{س} - 25
 \end{array}$$

- (١١) ارسم منحنى الدالة د(س) = س - ١ في الفترة [٣، ٤]، ومن الرسم عين إشارة د(س).
- (١٢) ارسم منحنى الدالة د(س) = -س + ٢ + س + ٤ في الفترة [٣، ٥]، ومن الرسم عين إشارة د(س).
- (١٣) **اكتشف الخطأ:** إذا كانت د(س) = س + ١، و(س) = ١ - س، فعين الفترة التي تكون فيها الدالتان موجبتين معًا.

حل يوسف	حل أميرة
$\text{س} = 1$ تجعل د(س) = ٠ د(س) موجبة في الفترة [١، ∞) $\text{س} = 1 \pm$ تجعل ر(س) = ٠ ر(س) موجبة في الفترة [١، ∞) لذلك فإن الدالتين تكونان موجبتين معًا في الفترة [١، ∞)	$\text{س} = 1$ تجعل د(س) = ٠ د(س) موجبة في الفترة [١، ∞) $\text{س} = 1 \pm$ تجعل ر(س) = ٠ ر(س) موجبة في الفترة [١، ∞) لذلك فإن الدالتين تكونان موجبتين معًا في الفترة [١، ∞)

أي الإجابتين يكون صحيحًا؟ مثل كلاً من الدالتين بيانيًا وتأكد من صحة الإجابة.

- (١٤) **منجم الذهب:** في الفترة من عام ١٩٩٠ إلى ٢٠١٠ كان إنتاج أحد مناجم الذهب مقدراً بالآلاف أوقية يتحدد بالدالة د: د(ن) = ١٢ - ن + ٩٦ - ن + ٤٨٠ حيث ن عدد السنوات، د(ن) إنتاج الذهب أولاً: ابحث إشارة دالة الإنتاج د.
- ثانياً: أوجد إنتاج منجم الذهب مقدراً بالآلاف أوقية في كل من العامين ١٩٩٠، ٢٠٠٥
- ثالثاً: في أي عام كان إنتاج المنجم مساوياً ٢٠١٦ ألف أوقية؟

## متباينات الدرجة الثانية فى مجهول واحد

### Quadratic Inequalities

٦-١

سوف تتعلم

Quadratic Inequalities

المتباينات التربيعية:

١ حل متباينة التربيعية فى متغير واحد



سبق أن درست متباينة الدرجة الأولى فى مجهول واحد، وعلمت أن حل المتباينة معاه إيجاد جميع قيم المجهول التى تحقق هذه المتباينة، وتكتب على صورة فترة، فهل يمكنك حل متباينة الدرجة الثانية فى مجهول واحد؟

لاحظ أن:

س<sup>٢</sup> - س - ٢ < ٠ هي متباينة تربيعية كما هو موضح بالشكل التالى

المصطلحات الأساسية

بينما د(س) = س<sup>٢</sup> - س - ٢ هي الدالة التربيعية المرتبطة بهذه المتباينة.

Inequality

١ متباينة

من الشكل المقابل نجد أن:

مجموعة حل المتباينة

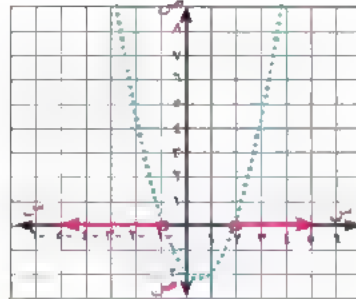
س<sup>٢</sup> - س - ٢ < ٠ فى ح

هي  $]-\infty, -1[ \cup ]2, \infty[$

مجموعة حل المتباينة

س<sup>٢</sup> - س - ٢ > ٠ فى ح

هما  $]-1, 2[$



الأدوات والوسائل

١ آلة حاسبة علمية

حل المتباينة التربيعية



١ حل المتباينة: س<sup>٢</sup> - ٥س + ٦ < ٠

### ● الحل

لحل هذه المتباينة نتبع الخطوات التالية:

خطوة (١): نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة وذلك كالآتي:

$$د(س) = س^2 - ٥س - ٦$$

خطوة (٢): ندرس إشارة الدالة د حيث د(س) = س^2 - ٥س - ٦ ،

ونوضحها على خط الأعداد بوضع د(س) = ٠

$$٠ = س^2 - ٥س - ٦$$

$$٠ = (س - ٦)(س + ١)$$

$$س = ٦ \text{ أ } س = -١$$



خطوة (٣): تحدد الفترات التي تحقق المتباينة س^2 - ٥س - ٦ < ٠



فيكون مجموعة حل المتباينة هي:  $]-\infty, -١] \cup [٦, \infty[$

### ◆ دور أن نحل

١ حل كلاً من المتباينات الآتية:

$$ب \quad س^2 + س + ١٢ < ٠$$

$$أ \quad س^2 + ٢س - ٨ < ٠$$

### مثال

٢ حل المتباينة:  $(س + ٣)^2 - ١٠ \geq ٣(س + ٣)$

### ● الحل



$$٠ \leq (س + ٣)^2 - ١٠ - ٣(س + ٣)$$

$$\therefore س^2 + ٦س + ٩ - ١٠ - ٣س - ٩ \geq ٠$$

$$\therefore س^2 + ٣س - ١٠ \geq ٠$$

$$س^2 + ٣س - ١٠ = ٠$$

$$٠ = (س + ٨)(س - ١)$$

المعادلة المرتبطة بالمتباينة هي:

بالتحليل إلى عوامل:

مجموعة حل المعادلة:  $[-٨, ١]$

★ ويوضع خط الأعداد التالي إشارة الدالة د(س) = س^2 + ٣س - ١٠



وعلى ذلك فإن: مجموعة حل المتباينة هي:  $[-8, -1]$

حاول أن تحل

حل المتباينات الآتية:

$$3 \leq (3+s)^2 + 3(3+s) - 10 \leq 0$$

$$1 \leq 5s^2 + 13s - 44 \leq 44$$

١ ما الفرق بين معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد ومتباينة الدرجة الثانية في متغير واحد؟

٢ ما علاقة بحث إشارة الدالة التربيعية بحل متباينات الدرجة الثانية في متغير واحد؟

٣ اكتشف الخطأ: أوجد مجموعة حل المتباينة  $(1+s)^2 > 4(2-s)$

حل نور

$$0 < (1+s)^2 > 4(2-s)$$

$$0 < 1 + 2s + s^2 > 8 - 4s$$

$$0 < 15s^2 + 18s - 7 < 0$$

المعادلة المرتبطة بالمتباينة هي:

$$0 = (1+s)(15s-7)$$

مجموعة الحل هي  $\{1, \frac{7}{15}\}$



★ بحث إشارة الدالة د حيث

$$0 = (1+s)(15s-7)$$

نجد أن:

مجموعة حل المتباينة هي  $[\frac{7}{15}, 1]$

حل يوسف

$$0 < (1+s)^2 > 4(2-s)$$

$$0 < 1 + 2s + s^2 > 8 - 4s$$

التربيع للطرفين

$$0 < 1 + 2s + s^2 > 8 - 4s$$

$$0 < 3s^2 + 6s - 7 < 0$$

المعادلة المرتبطة بالمتباينة هي:

$$0 = 3s^2 + 6s - 7$$

مجموعة الحل هي  $\{1\}$



★ بحث إشارة الدالة د حيث

$$0 = (1+s)(3s-7)$$

مجموعة حل المتباينة هي  $[1, 7/3]$

٤ تفكير ناقداً: أوجد مجموعة حل المتباينة  $3(3+s) > 10$



## تمارين ( ١ - ٦ )

أوجد مجموعة الحل للمتباينات التربيعية الآتية:

١)  $x^2 \geq 9$

٢)  $x^2 - 1 \geq 0$

٣)  $x^2 - 2x - 3 > 0$

٤)  $x^2 + 5 \geq 1$

٥)  $(x-2)(x-5) > 0$

٦)  $x^2 - (x+2) - 3 \geq 0$

٧)  $(x-2)^2 \geq 5$

٨)  $x^2 - 2x \geq 5$

٩)  $x^2 \leq 6x - 9$

١٠)  $3x^2 \geq 11x + 4$

١١)  $x^2 - 4x + 4 \leq 0$

١٢)  $7 + x^2 - 4x > 0$

## ملخص الوحدة

(١) حل المعادلة:  $أس^٢ + ب س + ج = ٠$  حيث  $ا، ب، ج \in \mathbb{R}$ ،  $ا \neq ٠$ .

الطريقة
التحليل إلى العوامل
إكمال المربع
استخدام القانون العام
التمثيل البياني

(٢) بحث نوع جذري المعادلة التربيعية

يسمى المقدار  $(ب^٢ - ٤ ا ج)$  بمميز المعادلة التربيعية الذي يبين نوع جذور المعادلة وعدد حلولها كالآتي:

- ★  $(ب^٢ - ٤ ا ج) < ٠$  يوجد جذران حقيقيان مختلفان.
- ★  $ب^٢ - ٤ ا ج = ٠$  يوجد جذر حقيقي واحد مكرر (جذران متساويان).
- ★  $ب^٢ - ٤ ا ج > ٠$  يوجد جذران مركبان غير حقيقيين.

(٣) الأعداد المركبة.

العدد المركب هو الذي يمكن كتابته على الصورة  $ا + ب ت$ ، حيث  $ا، ب$  عدنان حقيقيان،  $ب$  هو الجزء التخيلي، والجدول التالي يبين قوى  $ت$  للأسس الصحيحة الموجبة:

$ت^٠$	$ت^١$	$ت^٢$	$ت^٣$
$١$	$ت$	$-١$	$-ت$

تساوي عددين مركبين: إذا كان:  $ا + ب ت = ج + د ت$  فإن  $ا = ج$ ،  $ب = د$  والعكس صحيح

خواص العمليات: يمكن استخدام خواص الإبدال والتجميع والتوزيع عند جمع أو ضرب الأعداد المركبة، وعند جمع أو طرح الأعداد المركبة تجمع الأجزاء الحقيقية معًا وتجمع الأجزاء التخيلية معًا.

العدنان المترافقان: يسمى العدنان  $ا + ب ت$ ،  $ا - ب ت$  بالعددين المترافقين

حيث ناتج جمعهما عدد حقيقي، وحاصل ضربهما عدد حقيقي أيضًا.

## ملخص الوحدة

٤) مجموع وحاصل ضرب جذري المعادلة التربيعية:

إذا كان جذرا المعادلة  $أس^2 + بس + ج = ٠$  هما ل، م فإن:  $ل + م = -\frac{ب}{أ}$  ،  $ل م = \frac{ج}{أ}$

٥) تكوين المعادلة التربيعية متى علم جذراها:

إذا كانت ل، م جذري المعادلة التربيعية، فإن المعادلة التربيعية تكون على الصورة الآتية:

$$★ (س - ل) (س - م) = ٠$$

★ إذا كان ل + م -  $\frac{ب}{أ}$  ، ل م -  $\frac{ج}{أ}$  فإن المعادلة هي  $أس^2 - (ل + م)س + ل م = ٠$

٦) بحث إشارة الدالة:

★ إشارة الدالة الثابتة د، حيث د(س) = ج، (ج ≠ ٠) هي نفس إشارة ج لكل س ∈ ع.

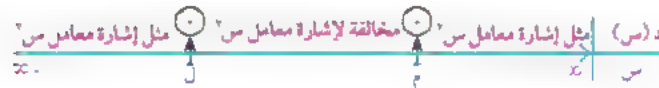
★ قاعدة الدالة الخطية د هي د(س) = ب س + ج ، ب ≠ ٠

فتكون س = -  $\frac{ج}{ب}$  عندما د(س) = ٠ والشكل التالي يمثل إشارة الدالة د:



★ لتعين إشارة الدالة د، حيث د(س) =  $أس^2 + ب س + ج$  ،  $أ ≠ ٠$  فإننا نوجد المميز

★ إذا كان: ب<sup>2</sup> - ٤أج < ٠ فإن إشارة الدالة د تتحدد حسب الشكل التالي:



★ إذا كان: ب<sup>2</sup> - ٤أج = ٠ فإنه يوجد للمعادلة جذران متساويان، وليكن كـ منهما يساوي ل، وتكون إشارة

الدالة د كالآتي: مثل إشارة أ عندما س ≠ ل ، د(س) = ٠ عندما س = ل

★ إذا كان: ب<sup>2</sup> - ٤أج > ٠ فإنه لا توجد جذور حقيقية، وتكون إشارة الدالة د مثل إشارة معامل س.

## ملخص الوحدة

⑦ حل متباينات الدرجة الثانية في مجهول واحد:

لحل المتباينة التربيعية نتبع الخطوات الآتية:

١- نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة ص = د(س) في الصورة العامة.

٢- ندرس إشارة الدالة د المرتبطة بالمتباينة ونوضحها على خط الأعداد.

٣- تحديد مجموعة حل المتباينة طبقاً للفترات التي تحققها.

### معلومات إضافية

قم بزيارة المواقع الآتية:





## الهندسة

# التشابه Similarity

### أهداف الوحدة

- في نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادراً على:
- † يسدعي ما سبق دراسته بالمرحلة الإعدادية على موضوع التشابه.
  - يتعرف تشابه مصعين.
  - يتعرف ويبرهن نظرية التي تنص على: (إذا تناسب أطوال الأضلاع الماسة في مثلثين فإنهما يتشابهان).
  - † يتعرف ويبرهن نظرية التي تنص على: (إذا طاعت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر، وناسبت أطوال الأضلاع التي تحتويها هاتان الزاويتان، كان المثلثان متشابهين).
  - † يتعرف ويبرهن النظرية التي تنص على: (النسبة بين مساحتي سطحي مثلثين متشابهين تساوي ...)
  - † يتعرف ويستنتج التمرين المشهور الذي ينص على: (إذا تقاصع المستقيمان الحاويان للوترين في دائرة في نقطة فإن ... وعكسه ونتائج عليه.
  - † يتعرف ويستنتج الحقيقة التي تنص على: (المضلعان المتشابهان يمكن أن يقسما إلى ...)
  - † يتعرف ويبرهن النظرية التي تنص على: (النسبة بين مساحتي مضلعين متشابهين تساوي ...)

### المصطلحات الأساسية

Tangent	† مماس	Corresponding Sides	† أضلاع متناظرة	Ratio	نسبة
Diameter	† قطر	Congruent Angles	† زوايا متطابقة	Proportion	† تناسب
Common External Tangent	† مماس خارجي مشترك	Regular Polygon	† مضلع منتظم	Measure of an Angle	† قياس زاوية
Common Internal Tangent	† مماس داخلي مشترك	Quadrilateral	† شكل رباعي	Length	† طول
Concentric Circles	† دوائر متحدة المركز	Pentagon	† شكل خماسي	Area	† مساحة
		Postulate/Axiom	† بديهية	Cross Product	† ضرب تبادلي
		Perimeter	† محيط	Extreme	† طرف
		Area of polygon	† مساحة مضلع	Mean	† وسط
	† نسبة لتشابه (معامل التشابه)	Chord	† وتر	Similar Polygons	† مضلعات متشابهة
Similarity Ratio		Secant	† قاطع	Similar Triangles	† مثلثات متشابهة





### محتوى البرنامج

- الدرس (٢ - ١): تشابه المضلعات.
- الدرس (٢ - ٢): تشابه المثلثات.
- الدرس (٢ - ٣): العلاقة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين.
- الدرس (٢ - ٤): تطبيقات التشابه في الدائرة.

### الأدوات المستخدمة

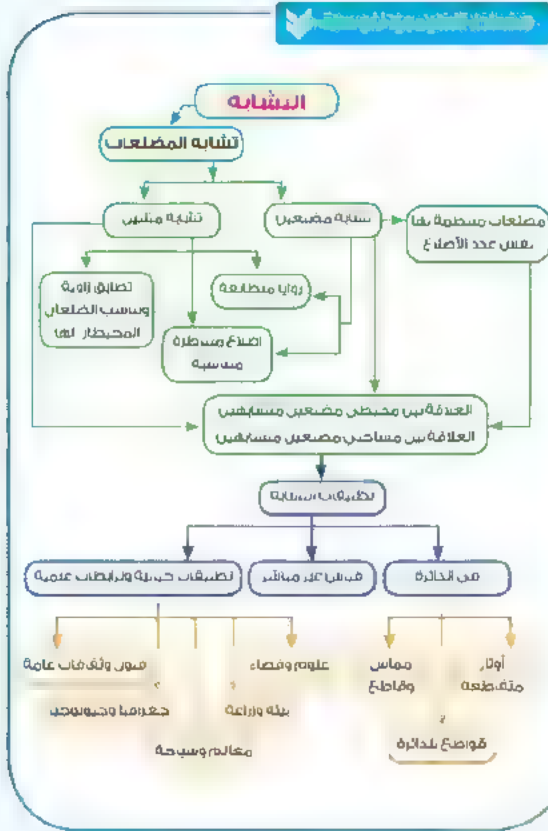
- حاسب آلي - جهاز عرض بيانات - برامج رسومية
- ورق مربعات - مرآة مستوية - أدوات قياس - آلة حاسبة.

### تاريخية

عند البناء على قطعة من الأرض نحتاج إلى عمل رسم تخطيطي للمبنى، ومن البديهي أنه لا يمكن عمل هذا الرسم الهندسي على قطعة من الورق تطابق قطعة الأرض، وإنما نلجأ إلى عمل صورة مصغرة تشابه الصورة الطبيعية للمبنى، وذلك باتخاذ مقياس رسم مناسب للحصول على هذا التصغير، وقياسات زوايا على الرسم، بحيث تساوي قياسات نظائرها في الواقع.

إذا تأملت الشكل الموضح في بداية الصفحة تلاحظ أن الطبيعة مليئة بأشكال تحتوي على أنماط تكرر نفسها بمقاييس مختلفة، ومن أمثلة ذلك أوراق الشجر، ورأس زهرة القرنبيط، وتعرُّحات ساحل البحر. ملاحظة هذه الأنماط المتكررة أدى إلى ظهور هندسة جديدة منذ قرابة 40 عامًا، والتي تهتم بدراسة الأشكال ذاتية التماثل والتي تتكرر بغير انتظام، وقد أطلق عليها اسم هندسة الفثايت أو هندسة الكسوريات fractals والتي سوف تدرسها في مراحل تعليمية تالية.

### محتوى البرنامج



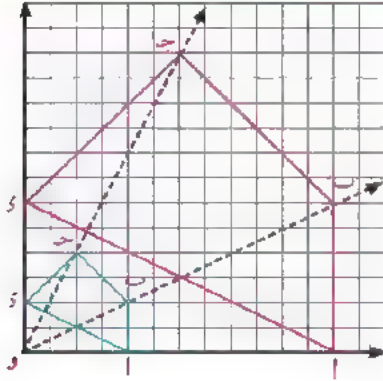
## تشابه المضلعات

### Similarity of Polygons

٢ - ١

#### سوف تتعلم

- مفهوم التشابه.
- تشابه المضلعات.
- مقياس الرسم
- المستطيل الذهبي والنسبة الذهبية



فكر واملس

يوضح الشكل المقابل المضلع  $أ ب ج د$  وصورة  $أ' ب' ج' د'$  بتحويل هندسي. أ قارن بين قياسات الزوايا المتناظرة:  
 $\angle أ - \angle أ' - \angle ب - \angle ب'$   
 $\angle ج - \angle ج' - \angle د - \angle د'$   
 ماذا تستنتج؟

ب أوجد النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة  $\frac{أ ب'}{أ ب}$ ،  $\frac{ب ج'}{ب ج}$ ،  $\frac{ج د'}{ج د}$ ،  $\frac{د أ'}{د أ}$  ماذا تلاحظ؟

عندما يكون للمضلعات الشكل نفسه، وإن اختلفت في أطوال أضلاعها، فإنها تسمى مضلعات متشابهة.

Similar polygons

المضلعات المتشابهة

**تعريف** «يتشابه مضلعان لهما نفس العدد من الأضلاع إذا كانت الزوايا المتناظرة متطابقة وأطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة».

لاحظ أن:

١- في الشكل الموضح **بند فكر وناقش** نجد:

$$١. \text{ الزوايا المتناظرة متطابقة: } \angle أ = \angle أ', \angle ب = \angle ب', \angle ج = \angle ج', \angle د = \angle د'$$

$$٢. \text{ الأضلاع المتناظرة متناسبة: } \frac{أ ب'}{أ ب} = \frac{ب ج'}{ب ج} = \frac{ج د'}{ج د} = \frac{د أ'}{د أ}$$

ولذلك يمكننا القول أن الشكل  $أ ب ج د$  يشابه الشكل  $أ' ب' ج' د'$

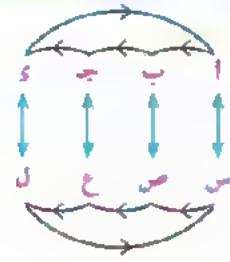
٢- نستخدم الرمز  $(\sim)$  للتعبير عن تشابه مضلعين، ويراعى ترتيب كتابة رؤوسهما المتناظرة حتى يسهل كتابة التناسب بين الأضلاع المتناظرة.

#### المصطلحات الأساسية

- مضلعات متشابهة
- Similar Polygons
- Similar Triangles
- مضلعات متشابهة
- أضلاع متناظرة
- Corresponding Sides
- Congruent Angles
- زوايا متطابقة
- Regular Polygon
- مضلع منتظم
- Quadrilateral
- شكل رباعي
- Pentagon
- شكل خماسي
- نسبة التشابه (معامل التشابه)
- Similarity Ratio

#### الأدوات والوسائل

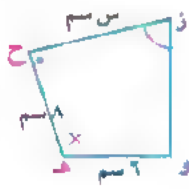
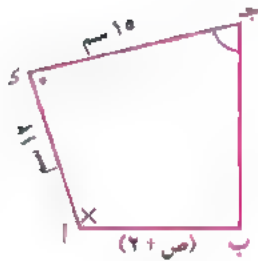
- حاسب آلي
- جهاز عرض بيانات
- برامج رسومية
- ورق مربعات
- أدوات قياس
- آلة حاسبة



إذا كان المضلع  $أ ب ج د$  ~ المضلع  $س ص ع ل$  فإن:  
 $أ \triangleq س$  ،  $ب \triangleq ص$  ،  $ج \triangleq ع$  ،  $د \triangleq ل$  ،  $\angle أ \equiv \angle س$  ،  $\angle ب \equiv \angle ص$  ،  $\angle ج \equiv \angle ع$  ،  $\angle د \equiv \angle ل$

ب  $\frac{أ ب}{س ص} = \frac{ب ج}{ص ع} = \frac{ج د}{ع ل} = \frac{د أ}{ل س} = ك$  (نسبة التشابه)،  $ك \neq 0$ .  
 ويكون معامل تشابه المضلع  $أ ب ج د$  للمضلع  $س ص ع ل$  -  $ك$ ،  
 ومعامل تشابه المضلع  $س ص ع ل$  للمضلع  $أ ب ج د$  -  $\frac{1}{ك}$

## مثال



١ في الشكل المقابل: المضلع  $أ ب ج د$  ~ المضلع  $س ص ع ل$ .

أ أوجد معامل تشابه المضلع  $أ ب ج د$  للمضلع  $س ص ع ل$ .  
 ب أوجد قيم  $س$ ،  $ص$ .

الحل

المضلع  $أ ب ج د$  ~ المضلع  $س ص ع ل$

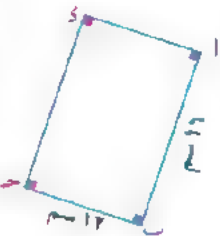
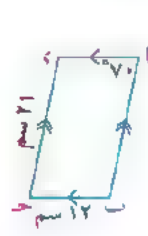
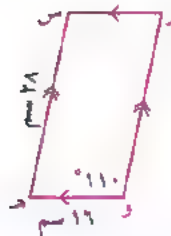
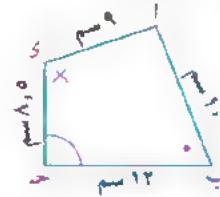
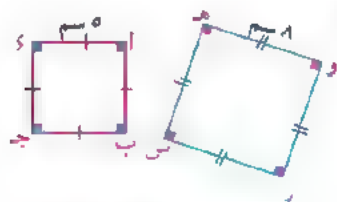
فيكون:  $\frac{أ ب}{س ص} = \frac{ب ج}{ص ع} = \frac{ج د}{ع ل} = \frac{د أ}{ل س} = \text{معامل التشابه}$   
 $\frac{15}{س} = \frac{12}{ص} = \frac{10}{8} = \frac{8}{ل}$

أ معامل التشابه -  $\frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

ب  $\frac{15}{س} = \frac{5}{4} \Rightarrow س = 12$  سم ،  $\frac{12}{ص} = \frac{5}{4} \Rightarrow ص = 9.6$  سم

## حاول أن تحل

١ بين أيًا من أزواج المصطلحات التالية تكون متشابهة، واكتب المصطلحات المتشابهة بترتيب الرؤوس المتناظرة وحدد نسبة التشابه.



مكر

هل جميع المعينات متشابهة؟  
هل جميع متوازيات الأضلاع متشابهة؟ فسر إجابتك.

هل جميع المربعات متشابهة؟  
هل جميع المستطيلات متشابهة؟

لاحظ أن

١- لكي يتشابه مضلعان يجب أن يتوافر الشرطان معاً، ولا يكفي توافر أحدهما دون الآخر.



المضلع م  $\not\sim$  المضلع م

٢- المضلعان المتطابقان يكونان متشابهين، وذلك لتوافر شرط التشابه (المضلع م  $\sim$  المضلع م) ويكون معامل التشابه لهما عندئذ مساوياً (واحد) ولكن ليس من الضروري أن يكون المضلعان المتشابهان متطابقين (المضلع م  $\not\equiv$  المضلع م) كما في الشكل المقابل.



المضلع م  $\sim$  المضلع م

٣- المضلعان المشابهان لثالث متشابهان

فإذا كان المضلع م  $\sim$  المضلع م،

المضلع م  $\sim$  المضلع م،

فإن: المضلع م  $\sim$  المضلع م.



٤- كل المضبعات المنتظمة التي لها نفس العدد من الأضلاع تكون متشابهة. لماذا؟



مثال

٢) في الشكل المقابل:  $\Delta$  أ ب ج  $\sim$   $\Delta$  د ه و،

و ه = ٨ سم ، ه و = ٩ سم ، و د = ١٠ سم

إذا كان محيط  $\Delta$  أ ب ج = ٨١ سم.

أوجد أطوال أضلاع  $\Delta$  أ ب ج.

الحل

$\Delta$  أ ب ج  $\sim$   $\Delta$  د ه و

(خواص التناسب)

$$\frac{\text{محيط } \Delta \text{ أ ب ج}}{\text{محيط } \Delta \text{ د ه و}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{د ه}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ه و}} = \frac{\text{ج أ}}{\text{و د}} = \frac{\text{أ ب} + \text{ب ج} + \text{ج أ}}{\text{د ه} + \text{ه و} + \text{و د}}$$

$$\text{ويكون: } \frac{\text{أ ب}}{٨} = \frac{\text{ب ج}}{٩} = \frac{\text{ج أ}}{١٠} = \frac{\frac{\text{أ ب} + \text{ب ج} + \text{ج أ}}{٨١}}{\frac{٨ + ٩ + ١٠}{٢٧}}$$

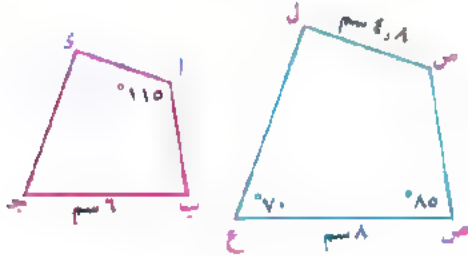
$$\therefore \text{أ ب} = ٨ \times \frac{٨١}{٢٧} = ٢٤ \text{ سم ، ب ج} = ٩ \times \frac{٨١}{٢٧} = ٢٧ ، ج أ = ١٠ \times \frac{٨١}{٢٧} = ٣٠ \text{ سم}$$

لاحظ أن:

إذا كان المضلع م، ~ المضلع م، فإن  $\frac{\text{محيط المضلع م}}{\text{محيط المضلع م}} = \text{نسبة التشابه (معامل التشابه)}$

حاول أن تحل

٢ في الشكل المقابل:



المضلع أ ب ج د ~ المضلع س ص ع ل

أ - احسب (س ل ع)، طول أ د

ب - إذا كان محيط المضلع أ ب ج د = 19,5 سم

أوجد محيط المضلع س ص ع ل.

Similarity ratio of two polygons

معامل التشابه لمضلعين:

ليكن ك معامل تشابه المضلع م، للمضلع م،

إذا كان:  $ك < 1$  فإن المضلع م، هو تكبير للمضلع م، $ك > 1$  فإن المضلع م، هو تصغير للمضلع م، $ك = 1$  فإن المضلع م، يطابق المضلع م،

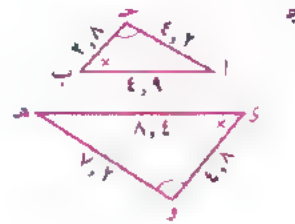
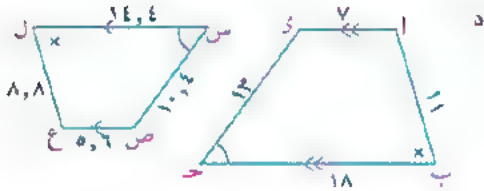
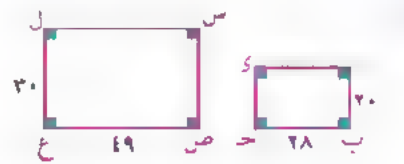
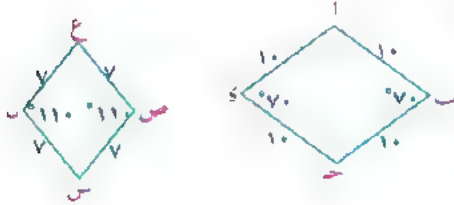
وبصفة عامة يمكن استخدام معامل التشابه في حساب أبعاد الأشكال المتشابهة.



## تمارين ٢ - ١



١) بين أيًا من أزواج المضلعات التالية تكون متشابهة، واكتب المضلعات المتشابهة بترتيب الرؤوس المتناظرة، وحدد معامل التشابه (الأطوال مقطرة بالسنتيمترات).



٢) إذا كان المضلع  $أ ب ج د$  ~ المضلع  $س ص ع ل$ ، أكمل:

ب  $أ ب \times ع ل = س ص \times$

ا  $\frac{أ ب}{س ص} = \frac{ب ج}{ص ع}$

د  $\frac{\text{محيط المضلع}}{\text{محيط المضلع}} = \frac{س ص}{أ ب}$

ج  $\frac{ب ج + ص ع}{ل س} = \frac{أ ب + س ص}{س ص}$

٣) المضلع  $أ ب ج د$  ~ المضلع  $س ص ع ل$ . فإذا كان:  $أ ب = ٢٣$  سم،  $ب ج = ٤٠$  سم،  $س ص = ٣$  م -  $١$ ،  $ص ع = ٣$  م -  $١$ . أوجد قيمة  $م$  العددية.

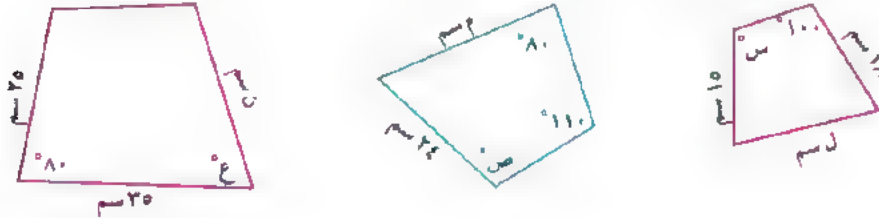
٤) مستطيل بعده  $١٠$  سم،  $٦$  سم. أوجد محيط ومساحة مستطيل آخر مشابه له إذا كان:  $١$  معامل التشابه  $٣$   $ب$  معامل التشابه  $٠,٤$



٥) في كل من الأشكال التالية المضلع م، ~ المضلع م، ~ المضلع م، ~ المضلع م،  
أوجد معامل تشابه كل من المضلع م، المضلع م، المضلع م، للمضلع م،.



٦) المضلعات الثلاثة التالية متشابهة. أوجد القيمة العددية للرمز المستخدم في القياس.



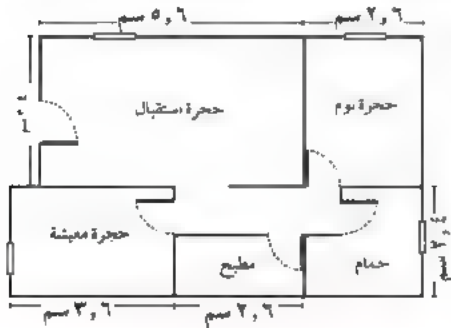
٧) مستطيلان متشابهان بُعد الأول ٨ سم، ١٢ سم، ومحيط الثاني ٢٠٠ سم. أوجد طول المستطيل الثاني ومساحته.

#### نشاط

٨) هندسة معمارية: يوضح الشكل المقابل مخططاً

لإحدى الوحدات السكنية بمقياس رسم ١ : ١٥٠. أوجد:

- أبعاد حجرة الاستقبال.
- أبعاد حجرة النوم.
- مساحة حجرة المعيشة.
- مساحة الوحدة السكنية.

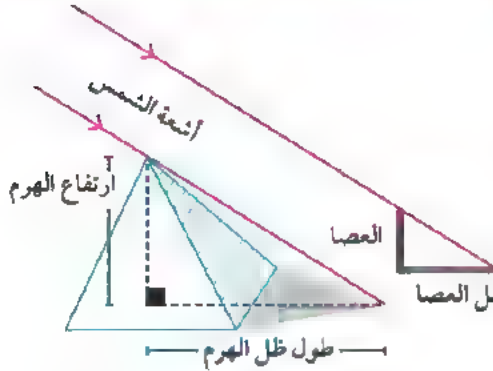


## تشابه المثلثات Similarity of Triangles

٢ - ٢

### سوف تتعلم

- ٤ حالات تشابه المثلثات.
- ٤ خصائص المبرود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في المثلث لتقاسم الراوية



طلب أحد ملوك الفراعنة إلى الرياضي طاليس (٦٠٠ ق.م) أن يوجد ارتفاع الهرم الأكبر، ولم تكن هناك أجهزة أو آلات أو طريقة لإيجاد ارتفاع الهرم مباشرة.

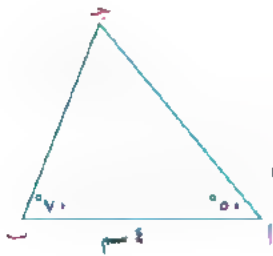
ثبت طاليس عصا رأسيًا

وبدأ يقيس ظل العصا ويقارنه بطول العصا نفسها إلى أن جاء وقت وجد فيه أن طول ظل العصا يساوي الطول الحقيقي للعصا نفسها. فقام بقياس طول ظل الهرم، وكان هو ارتفاع الهرم نفسه.

### المصطلحات الأساسية

٤ بديهية Postulate / Axiom

إذا طلب منك قياس ارتفاع سارية العلم باستخدام عصا وشريط مدرج فهل تنتظر حتى يصبح طول ظل العصا مساويًا لطول العصا نفسها أو يمكنك قياس ارتفاع سارية العلم في أي وقت من يوم مشمس؟ قسّر إجابتك.



١- ارسم  $\triangle$  أ ب ج الذي فيه:

و (أ) =  $50^\circ$ ، و (ب) =  $70^\circ$ ، أ ب = ٤ سم

٢- ارسم  $\triangle$  د ه و الذي فيه:

و (د) =  $50^\circ$ ، و (هـ) =  $70^\circ$ ، د ه = ٥ سم

٣- أوجد بالقياس لأقرب ملليمتر أطوال كل من: أ ج ، ب ج ، د و ، هـ و

٤- استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد النسب  $\frac{أ ج}{د و}$  ،  $\frac{ب ج}{هـ و}$  ،  $\frac{أ ب}{د هـ}$

هل النسب متساوية؟ ماذا تستنتج عن هذين المثلثين؟  
قارن نتائجك مع نتائج المجموعات الأخرى واكتب ملاحظتك.

### الأدوات والوسائل

- ٤ حاسب آلي
- ٤ جهاز عرض بيانات
- ٤ برامج رسومية
- ٤ ورق مربعات
- ٤ مرآة مستوية
- ٤ أدوات قياس
- ٤ آلة حاسبة

## postulate (or axiom)

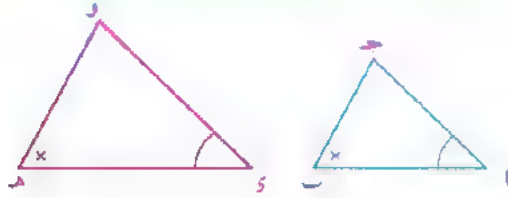
إذا طابقت زاويتان في مثلث نظائريهما في مثلث آخر كان المثلثان متشابهين.

مسلمة

في الشكل المقابل:

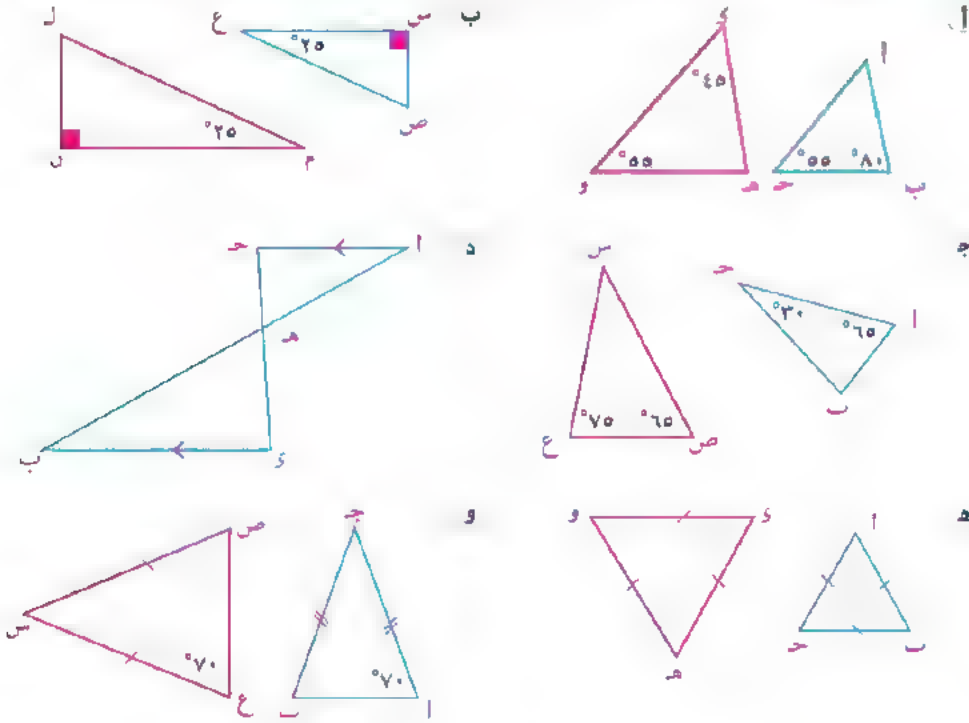
إذا كان  $\angle 1 = \angle 2$  ،  $\angle 3 = \angle 4$  ،  $\angle 5 = \angle 6$  ،

فإن  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$  وهو



حاول أن تحل

١) بين أيًا من أزواج المثلثات التالية تكون متشابهة. اكتب المثلثات المتشابهة بترتيب الرؤوس المتناظرة.



لاحظ أن

١- المثلثان المتساويا الأضلاع متشابهان. (كما في هـ)

٢- يتشابه المثلثان متساويا الساقين إذا ساوى قياس إحدى زاويتي القاعدة في أحدهما قياس إحدى زاويتي القاعدة في المثلث الآخر: (كما في و) أو إذا تساوى قياسا زاويتي رأسيهما.

٣- يتشابه المثلثان القائم الزاوية إذا ساوى قياس إحدى الزاويتين الحادتين في أحدهما قياس إحدى الزاويتين الحادتين في المثلث الآخر (كما في ب).

### مثال

١) في المثلث  $\triangle ABC$ ،  $D \in AB$ ،  $E \in AC$  حيث  $DE \parallel BC$ ،

$AD = 2$  سم،  $DB = 3$  سم،  $AE = 4$  سم،  $EC = 6$  سم.

أ) أثبت أن  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

ب) أوجد طول كل من:  $DE$ ،  $BC$

الحل

أ)  $\because DE \parallel BC$ ،  $\overrightarrow{AD} \cap \overrightarrow{AB}$  قاطع لهما.

$\therefore \angle ADE = \angle ABC$

في المثلثين  $\triangle ADE$ ،  $\triangle ABC$

$\therefore \angle ADE = \angle ABC$

$\angle DAE = \angle BAC$

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$

ب)  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$  ويكون:

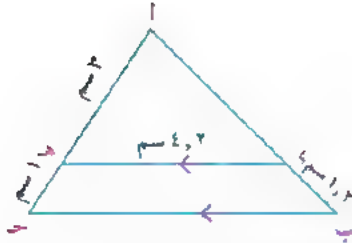
$$\frac{2}{2+3} = \frac{4}{4+6} = \frac{DE}{BC}$$

$$\therefore 2(4+6) = 4(2+3)$$

$$20 = 14 + 6$$

$$10 = 2 + 3$$

(برهاناً)  
(زاوية مشتركة في المثلثين)  
(مسلمة التشابه)



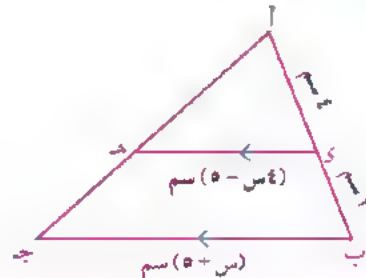
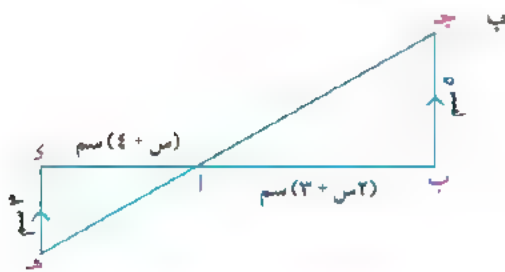
$$2 \times 10 = 4 \times 5$$

$$\frac{2 \times 10}{4} = \frac{4 \times 5}{2}$$

$$5 = 2 + 3$$

حاول أن تحل

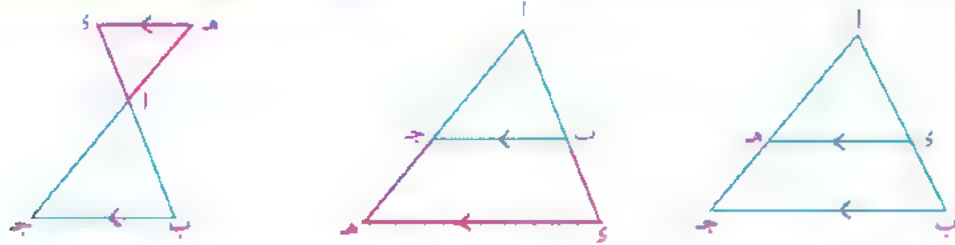
٢) في كل من الأشكال التالية، أثبت أن  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$  ثم أوجد قيمة  $s$ .



نتائج هامة

إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين أو المستقيمين الحاملين لهما فإن المثلث الناتج يشابه المثلث الأصلي.

سجده

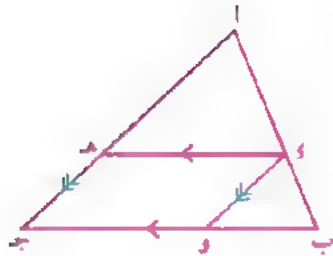


إذا كان  $\overline{هـ هـ} \parallel \overline{ب ج}$  ويقطع  $\overline{أ ب}$ ،  $\overline{أ ح}$  في  $هـ$ ، على الترتيب كما في الأشكال الثلاثة السابقة فإن:  $\triangle أ هـ \sim \triangle أ ب ج$

## مثال

② في الشكل المقابل:  $أ ب ج$  مثلث،  $و \in \overline{أ ب}$ ، رسم  $\overline{هـ هـ} \parallel \overline{ب ج}$  ويقطع  $\overline{أ ج}$  في  $هـ$ ،  $\overline{و و} \parallel \overline{أ ج}$  ويقطع  $\overline{ب ج}$  في  $و$ .  
برهن أن:  $\triangle أ هـ \sim \triangle و ب و$

الحل



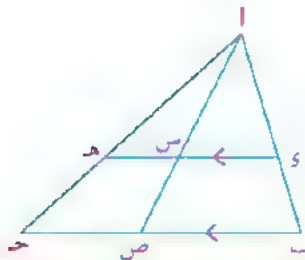
$$(١) \quad \because \overline{هـ هـ} \parallel \overline{ب ج} \quad \therefore \triangle أ هـ \sim \triangle أ ب ج$$

$$(٢) \quad \because \overline{و و} \parallel \overline{أ ج} \quad \therefore \triangle و ب و \sim \triangle أ ب ج$$

من (١)، (٢) ينتج أن:  $\triangle أ هـ \sim \triangle و ب و$  (وهو المطلوب)

## حاول أن تحل

② في الشكل المقابل:  $أ ب ج$  مثلث،  $و \in \overline{أ ب}$ ، رسم  $\overline{هـ هـ} \parallel \overline{ب ج}$  ويقطع  $\overline{أ ج}$  في  $هـ$ ، رسم  $\overline{س س} \parallel \overline{هـ هـ}$ ،  $\overline{ب ج}$  في  $س$ ، ص على الترتيب.  
أذكر ثلاثة أزواج من المثلثات المتشابهة.



$$ب \text{ أثبت أن: } \frac{س س}{ب س} = \frac{س هـ}{ب هـ} = \frac{س ح}{ب ح}$$

**نقطة:** إذا رسم من رأس القائمة في المثلث القائم الزاوية عمود على الوتر انقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين، وكلاهما يشابه المثلث الأصلي.

في الشكل المقابل:  $أ ب ج$  مثلث قائم الزاوية في  $أ$ ،  $\overline{أ و} \perp \overline{ب ج}$   
 $\triangle و ب أ$ ،  $\triangle أ ب ج$  فيها

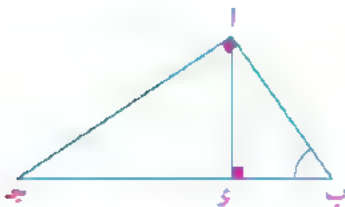
وه  $(\angle أ ب و) = 90^\circ$ ، وه  $(\angle ج أ ب)$  مشتركة في المثلثين.

$\therefore \triangle و ب أ \sim \triangle أ ب ج$  (مسلمة التشابه) (١)

وبالمثل  $\triangle و ب أ \sim \triangle أ ج و$  (٢)

$\therefore$  المثلثان المشابهان لثالث متشابهان

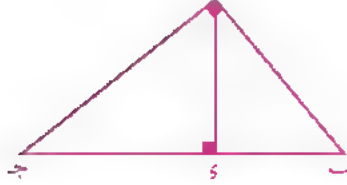
$\therefore \triangle و ب أ \sim \triangle أ ج و \sim \triangle أ ب ج$



### مثال

٣) أ ب ج مثلث قائم الزاوية في أ،  $\overline{أ ي} \perp \overline{ب ج}$  أثبت أن  $أ$  وسط متناسب بين  $ب$ ، و  $ج$

الحل



المعطيات: في  $\triangle أ ب ج$ ،  $\angle أ = 90^\circ$ ،  $\overline{أ ي} \perp \overline{ب ج}$

المطلوب: إثبات أن  $أ$  وسط متناسب بين  $ب$  و  $ج$

البرهان: في  $\triangle أ ب ج$

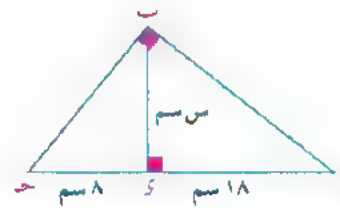
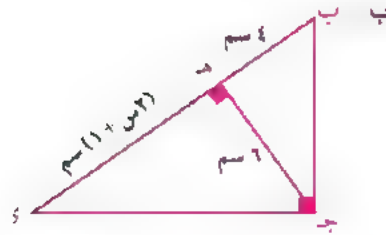
∴  $\angle أ = 90^\circ$ ،  $\overline{أ ي} \perp \overline{ب ج}$

∴  $\triangle أ ب ي \sim \triangle أ ج ي$  (نتيجة)

ويكون:  $\frac{أ ب}{أ ي} = \frac{أ ي}{أ ج}$  أي أن  $أ$  وسط متناسب بين  $ب$  و  $ج$

حاول أن تحل

٤) في كل من الأشكال التالية أوجد قيمة  $س$  العددية:



### مثال

٤) في الشكل المقابل أ ب ج مثلث قائم الزاوية في أ،

$\overline{أ ي} \perp \overline{ب ج}$  أثبت أن:

أ)  $\angle أ ب ي = \angle ب ج ي$

ب)  $\angle أ ج ي = \angle ب ج ي$

الحل

في  $\triangle أ ب ج$ :

∴  $\angle أ = 90^\circ$ ،  $\overline{أ ي} \perp \overline{ب ج}$

∴  $\triangle أ ب ي \sim \triangle أ ج ي$  (نتيجة)

ويكون:  $\angle أ ب ي = \angle ب ج ي$

(نتيجة)

ويكون:  $\angle أ ج ي = \angle ب ج ي$

∴  $\frac{أ ب}{أ ي} = \frac{أ ي}{أ ج}$

$\triangle أ ج ي \sim \triangle أ ب ي$

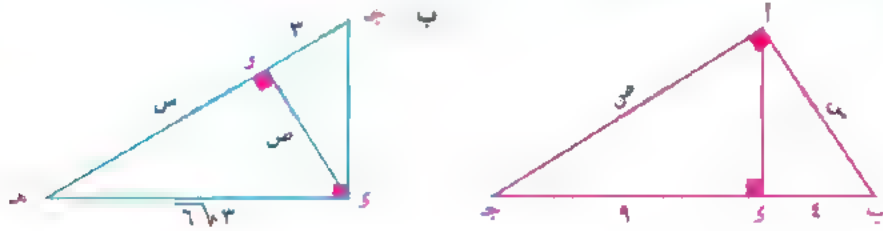
∴  $\frac{أ ج}{أ ي} = \frac{أ ي}{أ ب}$

تعد النتائج التي تم إثبات صحتها في مثالي ٣، ٤ برهاناً لنظرية أقليدس التي سبق لك دراستها في المرحلة الإعدادية.



## حاول أن تحل

٥ أوجد قيمة س، ص العددية في أبسط صورة (الأبعاد مقدرة بالسنتيمترات)



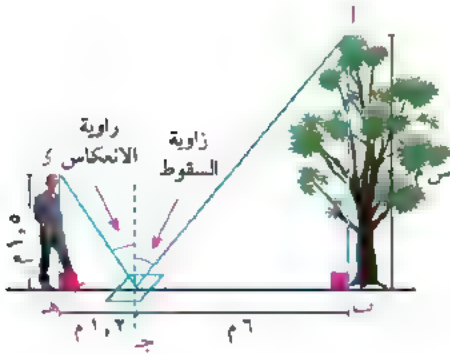
## Indirect measurement

## القياس غير المباشر

في بعض الحالات يصعب قياس مسافة أو ارتفاع معين مباشرة، وفي هذه الحالة يمكنك استخدام تشابه المثلثات لإيجاد هذا القياس بطريقة غير مباشرة.

إحدى الطرق تستخدم خاصية انعكاس الضوء في المرآة المستوية، كما في المثال التالي.

## مثال



٥ **فيزياء:** أراد يوسف أن يعرف ارتفاع إحدى الأشجار فوضع مرآة على مسافة ٦ أمتار من قاعدة الشجرة، ثم تحرك إلى الخلف حتى استطاع أن يرى قمة الشجرة في وسط المرآة - عند هذه النقطة كان يوسف قد تحرك بعيداً عن المرآة مسافة ١,٢ متر وكانت عيناه على ارتفاع ١,٥ متر فوق سطح الأرض. فإذا كانت قدماء والمرآة وقاعدة الشجرة على استقامة واحدة أوجد ارتفاع الشجرة. علماً بأن قياس زاوية السقوط = قياس زاوية الانعكاس.

## الحل

بفرض أن ارتفاع الشجرة س مترًا، قياس زاوية السقوط =  $\theta$

∴ قياس زاوية الانعكاس =  $\theta$

في المثلثين أ ب ج، د ه ج

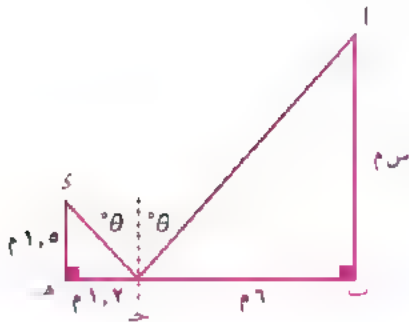
و (أ ب) = و (د ه) ∴ (أ ب) = (د ه) =  $90^\circ$

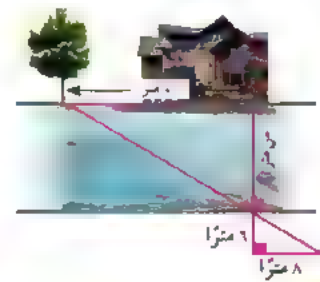
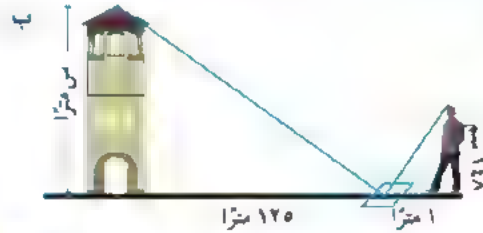
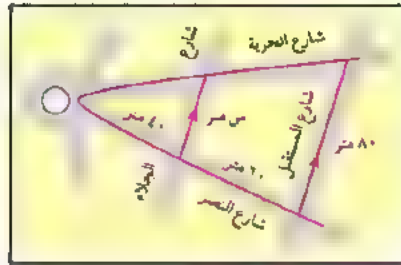
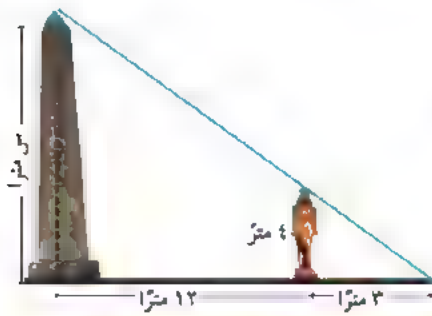
و (أ ج ب) = و (د ه ج) ∴ (أ ج ب) = (د ه ج) =  $(\theta - 90^\circ)$

∴  $\triangle أ ب ج \sim \triangle د ه ج$  ويكون:  $\frac{أ ب}{د ه} = \frac{ب ج}{ه ج}$

∴  $\frac{6}{1.2} = \frac{س}{1.5}$  ويكون س = ٧,٥ متر

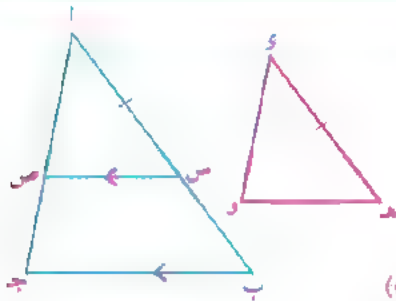
أي أن ارتفاع الشجرة يساوي ٧,٥ مترًا.





إذا تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة في مثلثين فإنهما يتشابهان.

بطريقة



(نتيجة (١))

(معلً)

(١)

(معطيات) (٢)

(تتابع الأضلاع الثلاثة لنظائرها في الآخر)

(برهاننا)

(وهو المطلوب)

المعطيات: المثلثان  $\triangle ABC$ ،  $\triangle DEF$  وهما  $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

المطلوب:  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

البرهان : عيّن  $S$  على  $\overline{AB}$  حيث  $AS = DE$ ،

ارسم  $S \parallel \overline{BC}$  ويقطع  $\overline{AC}$  في  $S$ .

$\therefore S \parallel \overline{BC}$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ASB$

ويكون  $\frac{AB}{AS} = \frac{BC}{SB} = \frac{AC}{SA}$

$\therefore AS = DE$

$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{SB} = \frac{AC}{SA}$

$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

من (١)، (٢) ينتج أن:  $S = DE$ ،  $S \parallel BC$

ويكون  $\triangle ASB \equiv \triangle DEF$

$\therefore \triangle ASB \sim \triangle DEF$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ASB$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF$

## مثال

٦ في الشكل المقابل: ب، ص، جـ على استقامة واحدة. أثبت أن:

- أ  $\triangle اب ج \sim \triangle س ب ص$   
 ب  $\overrightarrow{ب ج}$  ينصف  $\triangle اب س$

الحل

أ في المثلثين اب ج، س ب ص نجد أن:

$$\frac{اب}{س ب} = \frac{١٢}{٩} = \frac{٤}{٣}, \quad \frac{ب ج}{ب ص} = \frac{٦+١٨}{١٨} = \frac{٤}{٣}, \quad \frac{ا ج}{س ص} = \frac{١٨}{١٣,٥} = \frac{٤}{٣}$$

ويكون  $\frac{اب}{س ب} = \frac{ب ج}{ب ص} = \frac{ا ج}{س ص}$   
 $\therefore \triangle اب ج \sim \triangle س ب ص$

ب  $\therefore \triangle اب ج \sim \triangle س ب ص$   
 أي أن  $\overrightarrow{ب ج}$  ينصف  $\triangle اب س$

أي أن الأضلاع المتناظرة متناسبة

$\therefore ق ( \triangle اب ج ) = ق ( \triangle س ب ص )$

٧ في الشكل المقابل:  $\overrightarrow{ا ب} \cap \overrightarrow{ج د} = \{هـ\}$  حيث  $\frac{ا هـ}{هـ د} = \frac{ب هـ}{هـ ج} = \frac{ا ج}{ج د}$  أثبت أن  $\overrightarrow{ا ج} \parallel \overrightarrow{ب د}$

الحل

$$\therefore \frac{ا هـ}{هـ د} = \frac{ب هـ}{هـ ج} \quad \therefore \frac{ا هـ}{هـ د} = \frac{ا ج}{ج د}$$

$$\therefore \frac{ب هـ}{هـ ج} = \frac{ا ج}{ج د} \quad \therefore \frac{ب هـ}{هـ ج} = \frac{ا ج}{ج د}$$

$$\text{من (١)، (٢) ينتج أن: } \frac{ا هـ}{هـ د} = \frac{ب هـ}{هـ ج} = \frac{ا ج}{ج د}$$

أي أن  $\triangle ا هـ ج \sim \triangle ب هـ د$

$\therefore ق ( \triangle ا هـ ج ) = ق ( \triangle ب هـ د )$

وهما في وضع تناظر بالنسبة للقاطع  $\overrightarrow{ج هـ}$

$\therefore \overrightarrow{ا ج} \parallel \overrightarrow{ب د}$

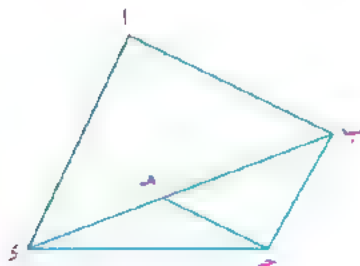
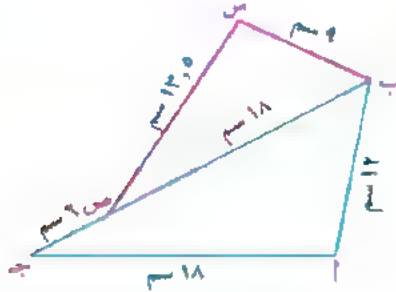
حاول أن تحل

٧ ا ب ج د شكل رباعي، هـ  $\in \overrightarrow{ب د}$  حيث:

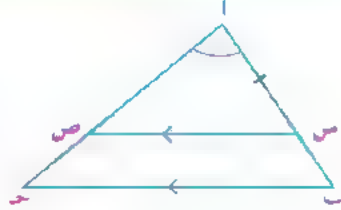
$$\frac{ا ب}{ب د} = \frac{ج هـ}{هـ د}, \quad \frac{ا ج}{ج د} = \frac{ب هـ}{هـ د}$$

$$\text{أثبت أن: } \frac{ا ب}{ب د} = \frac{ج هـ}{هـ د}, \quad \frac{ا ج}{ج د} = \frac{ب هـ}{هـ د}$$

$$\text{أثبت أن: } \frac{ا ب}{ب د} = \frac{ج هـ}{هـ د}, \quad \frac{ا ج}{ج د} = \frac{ب هـ}{هـ د}$$



**نظرية ٢** إذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر، وتناسبت أطوال الأضلاع التي تحتويها هاتان الزاويتان، كان المثلثان متشابهين.



المعطيات:  $\angle س \equiv \angle ا$  ،  $\frac{اب}{و هـ} = \frac{اجـ}{و هـ}$

المطلوب:  $\Delta ا ب جـ \sim \Delta و هـ$

البرهان: خذ  $س \in \overline{اب}$  حيث  $اس = و هـ$

وارسم  $س ص \parallel ب جـ$

ويقطع  $اجـ$  في  $ص$

$\therefore س ص \parallel ب جـ$  ،  $\Delta ا ب جـ \sim \Delta ا س ص$  (نتيجة (١))

ويكون:  $\frac{اب}{اس} = \frac{اجـ}{اص}$

$\therefore \frac{اب}{و هـ} = \frac{اجـ}{و هـ}$  (معطى) ،  $اس = و هـ$  (عملا)

$\therefore \frac{اب}{اس} = \frac{اجـ}{اص}$  ويكون  $اص = و هـ$

$\Delta ا س ص \equiv \Delta و هـ$  (ضلعان و زاوية محصورة)

ويكون  $\Delta ا س ص \sim \Delta و هـ$  (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن:  $\Delta ا ب جـ \sim \Delta و هـ$  وهو المطلوب.

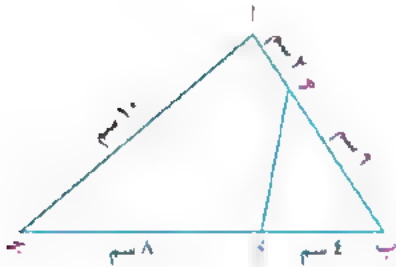
### مثال

٨)  $ا ب جـ$  مثلث،  $اب = ٨$  سم،  $اجـ = ١٠$  سم،  $ب جـ = ١٢$  سم،  $هـ \in \overline{اب}$  حيث  $اهـ = ٢$  سم،  $و \in \overline{ب جـ}$  حيث  $ب و = ٤$  سم.

أ برهن أن  $\Delta ب و هـ \sim \Delta ب ا جـ$  واستنتج طول  $و هـ$ .

ب برهن أن الشكل  $ا جـ و هـ$  رباعي دائري.

الحل



$\therefore اب = ٨$  سم،  $اهـ = ٢$  سم،  $\therefore ب هـ = ٦$  سم

المثلثان  $ب و هـ$ ،  $ب ا جـ$  فيهما:

(١)  $\angle و هـ ب = \angle ا ب جـ$

$\frac{ب و}{ب ا} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$  ،  $\frac{ب هـ}{ب جـ} = \frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢}$

$\therefore \frac{ب و}{ب ا} = \frac{ب هـ}{ب جـ}$  (٢)

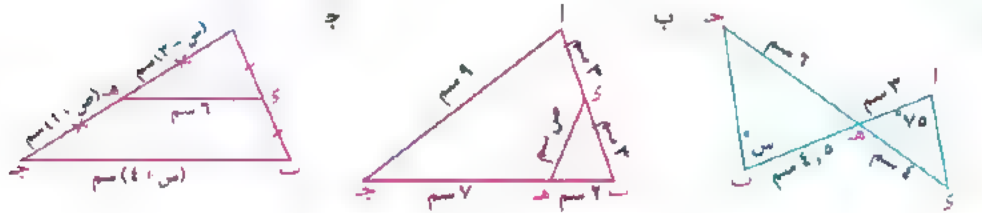
من (١)، (٢)  $\therefore \Delta ب و هـ \sim \Delta ب ا جـ$  (نظرية)

من التشابه  $\frac{و هـ}{ا جـ} = \frac{١}{٢}$  ،  $\therefore و هـ = \frac{١}{٢} \times ١٠ = ٥$  سم

ب من التشابه أيضًا  $\triangle ب و ه \equiv \triangle ب ا ج$   $\therefore و ه = ( \triangle ب و ه ) = و ه ( \triangle ب ا ج )$   
 $\therefore \triangle ب و ه$  خارجة عن الشكل الرباعي ا ج و ه  $\therefore$  الشكل ا ج و ه رباعي دائري.

حاول أن تحل

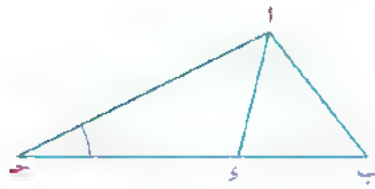
٨ في كل من الأشكال التالية أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس مفسرًا إجابتك.



مثال

٩ ا ب ج مثلث، و  $\exists$  ب ج حيث (ا ج) = ج و  $\times$  ج ب أثبت أن:  $\triangle ا ج و \sim \triangle ب ج ا$

الحل



(١) المثلثان ا ب ج، و ا ج د فيهما  $\angle$  مشتركة

$\therefore (ا ج) = ج و - ج و \times ج ب$

(٢)  $\frac{ج و}{ا ج} = \frac{ا ج}{ج ب}$

من (١)، (٢) ينتج أن  $\triangle ا ج و \sim \triangle ب ج ا$  (نظرية)

حاول أن تحل

٩ ا ب ج، و ه و مثلثان متشابهان، س منتصف ب ج، ص منتصف و ه وأثبت أن:

ب ا س  $\times$  ه = ا ب  $\times$  ص

ا  $\triangle ا ب س \sim \triangle و ه ص$



في كل من الأشكال التالية أوجد قيمة س.

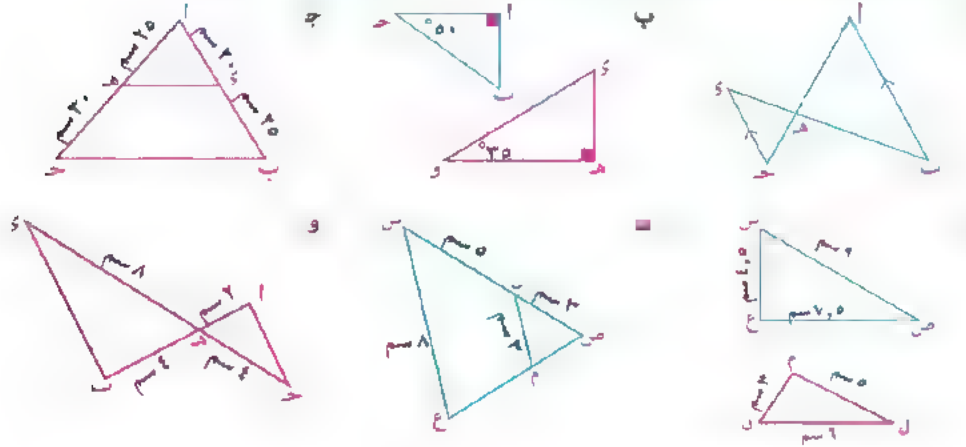




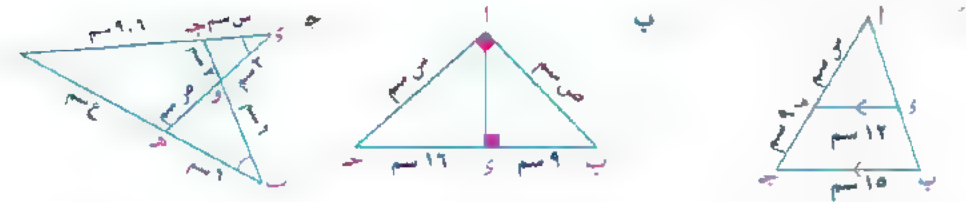
## تمارين ٢ - ٢



١ اذكر أي الحالات يكون فيها المثلثان متشابهين، وفي حالة التشابه اذكر سبب التشابه.



٢ أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس:



٣ في الشكل المقابل: أ ب ج مثلث قائم الزاوية أ و  $\overline{AB} \perp \overline{BC}$

أولاً: أكمل:  $\Delta \sim \Delta$  : أ ب ج  $\sim \Delta$   $\sim \Delta$

ثانياً: إذا كان س، ص، ع، ل، م، ن هي أطوال القطع المستقيمة بالستيمترات والمعينة بالشكل: فأكمل التناسبات التالية:

$$\begin{array}{l} \frac{س}{ص} = \frac{ل}{ع} \quad \frac{م}{ن} = \frac{ل}{ع} \quad \frac{س}{ص} = \frac{م}{ن} \quad \frac{ل}{ع} = \frac{س}{ص} \quad \frac{م}{ن} = \frac{ل}{ع} \quad \frac{س}{ص} = \frac{م}{ن} \quad \frac{ل}{ع} = \frac{س}{ص} \quad \frac{م}{ن} = \frac{ل}{ع} \end{array}$$

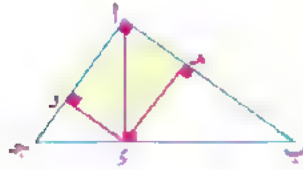
٤ أ ب، و ج وتران في دائرة، أ ب  $\cap$  و ج = {هـ} حيث هـ خارج الدائرة، أ ب = ٤ سم، و ج = ٧ سم، ب هـ = ٦ سم. أثبت أن  $\Delta أ ب هـ \sim \Delta ج ب هـ$  ثم أوجد طول ج هـ

٥ أ ب ج هـ و مثلثان متشابهان. رسم أ س  $\perp$  ب ج ليقطعه في س، ورسم و ص  $\perp$  هـ و ليقطعه في ص. أثبت أن ب س  $\times$  و = ج س  $\times$  ص هـ

٦ في المثلث أ ب ج، أ ج < أ ب، م  $\in$  أ ج حيث و (أ ب م) = و (أ ج) أثبت أن (أ ب) = أ م  $\times$  أ ج



- ٧) ا ب ج مثلث قائم الزاوية في ا، رسم  $\overrightarrow{اى} \perp \overrightarrow{ب ج}$  ليقطعه في و. إذا كان  $\frac{بى}{جى} = \frac{١}{٢}$ ، ا و =  $٢\sqrt{٦}$  سم  
أوجد طول كل من  $\overrightarrow{ب و}$ ،  $\overrightarrow{ا ب}$ ،  $\overrightarrow{ا ج}$ .



- ٨) فى الشكل المقابل: ا ب ج مثلث قائم الزاوية فى ا،

$$\overrightarrow{اى} \perp \overrightarrow{ب ج}، \overrightarrow{وه} \perp \overrightarrow{ا ب}، \overrightarrow{و و} \perp \overrightarrow{ا ج}$$

أثبت أن:

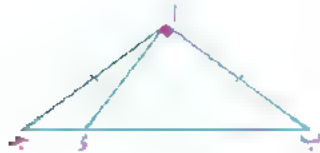
$$١ \Delta ا و ه \sim \Delta ج و و$$

$$٢ \text{ مساحة المستطيل ا ه و و} = \sqrt{ا ه \times ه ب \times ا و \times و ج}$$

- ٩) فى الشكل المقابل: ا ب ج مثلث منفرج الزاوية فى ا،

$$ا ب = ا ج، رسم \overrightarrow{اى} \perp \overrightarrow{ا ب} \text{ ويقطع } \overrightarrow{ب ج} \text{ فى و.}$$

$$\text{أثبت أن: } ٢(ا ب) = ب و \times ج و$$



- ١٠) تعبر المجموعتان ا، ب عن أطوال أضلاع مثلثات مختلفة بالاستيمترات.

اكتب أمام كل مثلث من المجموعة ا رمز المثلث الذى يشابهه من المجموعة ب

مجموعة (ب)

مجموعة (ا)

٥	٤	٢,٥	ا
١٤	١٣,٥	٨	ب
٥٥	٣٥	٢٥	ج
١١	١١	١١	د
٦	٤	٣,٥	هـ
١٠	٦	٨	و
٤٢	٥٤	٣٢	ز

٦	٦	٦	١
١١	٧	٥	٢
١٠	٨	٥	٣
١٢	٨	٧	٤
٢٨	٢٧	١٦	٥



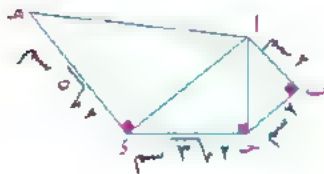
- ١١) فى الشكل المقابل: ا ب ج مثلث فيه ا ب = ٦ سم، ب ج = ٩ سم،

$$ا ج = ٧,٥ سم، و نقطة خارجة عن المثلث ا ب ج$$

$$\text{حيث } و ب = ٤ سم، و ا = ٥ سم، \text{ أثبت أن:}$$

$$١ \Delta ا ب ج \sim \Delta و ب ا$$

$$٢ \overrightarrow{ب ا} \text{ ينصف } \overrightarrow{ب ج}$$



- ١٢) من الشكل المقابل أكمل:

$$\Delta ا ب ج \sim \Delta$$

$$\text{ومعامل التشابه} =$$



1 Δ اهـ جـ ~ Δ سـ مـ عـ

۱۴) اب جب، س ص ع مثلثان متشابهان، حیث اب < اج، س ص < س ع.

(۱۵) اب جـ مثلث،  $y \in \overline{b_j c_j}$  حیث (ای)  $y = b_j \times c_j$ ،  $b_j \times a_j = y \times c_j$ ،  $a_j \times b_j = y \times c_j$  اثبت ان:



المدينة ج وعمودياً على الطريق السريع بين المدينتين أ، ب.

بَ مَا الْبَعْدَ مِنَ الْعَدِيتَيْنِ، ح؟

\_\_\_\_\_

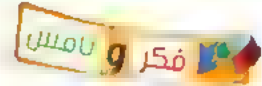
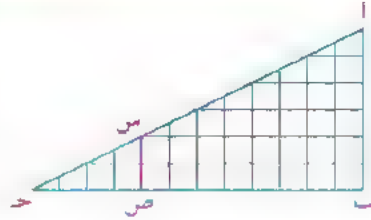
استخدام برنامج خرائط (Google Earth) لحساب أقصر بعد بين عواصم محافظات جمهورية مصر العربية

# العلاقة بين مساحتي سطحين متشابهين

The Relation Between the Area of two Similar Polygons

## سوف نتعلم

- العلاقة بين محيطي مثلعين متشابهين ومعامل (نسبة) التشابه.
- العلاقة بين مساحتي سطحين متشابهين ومعامل (نسبة) التشابه



على ورق مربعات رسم كل من المثلثين  
أ ب ج ، س ص ج  
١- بين لماذا يكون:

$\Delta$  س ص ج  $\sim$   $\Delta$  أ ب ج ؟ أوجد معامل التشابه عندئذ.

٢- احسب النسبة بين مساحة المثلث س ص ج إلى مساحة المثلث الأصلي أ ب ج

٣- عين نقطة أخرى مثل  $\Delta$  أ ب ج ، ثم ارسم  $\Delta$  و' ج' و' //  $\Delta$  أ ب ج ويقطع ب ج في  $\Delta$  و' ج' و' لتحصل على المثلث  $\Delta$  و' ج' و' ج ، هل  $\Delta$  و' ج' و' ج  $\sim$   $\Delta$  س ص ج ؟

٤- أكمل الجدول التالي:

## المصطلحات الأساسية

- محيط Perimeter
- مساحة Area
- مساحة مضلع Area of a Polygon
- أضلاع متناظرة Corresponding Sides

المثلثات	معامل التشابه	مساحة المثلث الأول	مساحة المثلث الثاني	النسبة بين مساحة المثلث الأول إلى مساحة المثلث الثاني
$\Delta$ س ص ج $\sim$ $\Delta$ أ ب ج	$\frac{1}{3}$	٤	٣٦	$\frac{1}{9} = \frac{4}{36}$
$\Delta$ و' ج' و' ج $\sim$ $\Delta$ أ ب ج				
$\Delta$ س ص ج $\sim$ $\Delta$ و' ج' و' ج				

٥- ماذا تعني النسب التي حصلت عليها مقارنة بمعامل التشابه (نسبة التشابه)؟

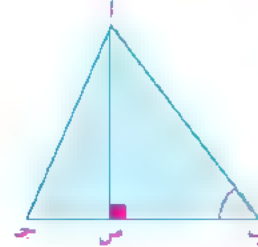
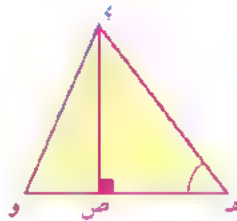
أولاً: النسبة بين مساحتي سطحين متشابهين:

النسبة بين مساحتي سطحين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما.

نظرية ٣

## الأدوات والوسائل

- حاسباتي
- جهاز عرض بيانات
- برامج وموسيقى
- ورق مربعات
- آلة حاسبة



المعطيات:  $\Delta$  أ ب ج  $\sim$   $\Delta$  و' ج' و'

**لاحظ**  
الرمز  $\overline{AB}$  يعبر عن مساحة  
سطح المثلث

$$\text{المطلوب: } \frac{\overline{(\Delta AB ج)}}{\overline{(\Delta و ه و)}} = \frac{\overline{(\frac{AB}{و ه})}}{\overline{(\frac{AB}{و ه})}} = \frac{\overline{(\frac{AB}{و ه})}}{\overline{(\frac{AB}{و ه})}}$$

البرهان: ارسم  $\overline{AS} \perp \overline{BH}$  حيث  $\overline{AS} \cap \overline{BH} = \overline{J}$ ،  
 $\overline{AS} \perp \overline{BH}$  حيث  $\overline{AS} \cap \overline{BH} = \overline{J}$   
 $\therefore \Delta AB ج \sim \Delta و ه و$

$$(1) \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{و ه}} = \frac{\overline{AB ج}}{\overline{و ه و}} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{و ه}} = \frac{\overline{AB ج}}{\overline{و ه و}}$$

في المثلثين  $AB ج$ ،  $و ه و$ ،  
 $\angle A = \angle و$ ،  $\angle B = \angle ه$ ،  $\angle C = \angle و ه و$

$$\angle A = \angle و = 90^\circ, \angle B = \angle ه = 90^\circ, \angle C = \angle و ه و = 90^\circ$$

$\therefore \Delta AB ج \sim \Delta و ه و$  (مسلمة التشابه)

$$(2) \quad \text{ويكون: } \frac{\overline{AB}}{\overline{و ه}} = \frac{\overline{AB ج}}{\overline{و ه و}}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{و ه}} = \frac{\overline{AB ج}}{\overline{و ه و}} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{و ه}} = \frac{\overline{AB ج}}{\overline{و ه و}}$$

بالتعويض من (1)، (2) يتضح أن:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{و ه}} = \frac{\overline{AB ج}}{\overline{و ه و}} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{و ه}} = \frac{\overline{AB ج}}{\overline{و ه و}}$$

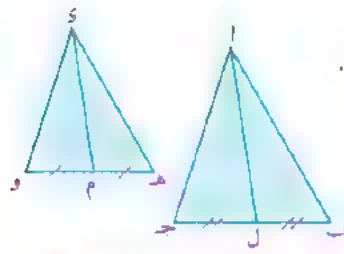
$$\text{اللاحظ: } \frac{\overline{AB}}{\overline{و ه}} = \frac{\overline{AB ج}}{\overline{و ه و}} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{و ه}} = \frac{\overline{AB ج}}{\overline{و ه و}}$$

$$\text{فيكون: } \frac{\overline{AB}}{\overline{و ه}} = \frac{\overline{AB ج}}{\overline{و ه و}}$$

أي أن النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين ارتفاعين متناظرين فيهما.

**تمثيل ناقص:**

١- إذا كان  $\Delta AB ج \sim \Delta و ه و$ ،  $\overline{J}$  منتصف  $\overline{BH}$ ،  $\overline{M}$  منتصف  $\overline{و ه و}$ .



$$\text{هل } \frac{\overline{AB}}{\overline{و ه}} = \frac{\overline{AB ج}}{\overline{و ه و}} \text{؟}$$

فسر إجابتك واكتب استنتاجك.

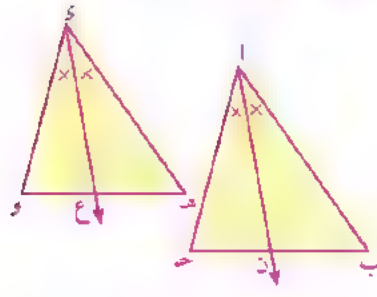
٢- إذا كان  $\Delta AB ج \sim \Delta و ه و$ ،

$\overline{AN}$  ينصف  $\Delta و ه و$  ويقطع  $\overline{BH}$  في  $\overline{N}$ ،

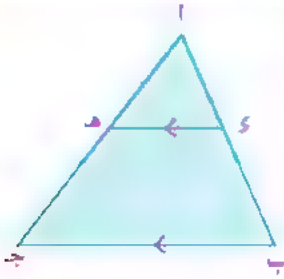
$\overline{AM}$  ينصف  $\Delta و ه و$  ويقطع  $\overline{و ه و}$  في  $\overline{M}$ .

$$\text{هل } \frac{\overline{AB}}{\overline{و ه}} = \frac{\overline{AB ج}}{\overline{و ه و}} \text{؟}$$

فسر إجابتك واكتب استنتاجك.



مثال



١ في الشكل المقابل:  $AB \parallel DE$ ، و  $DE \parallel BC$

حيث  $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{5}$ ، و  $DE \parallel BC$  ويقطع  $AC$  في  $H$ .

إذا كانت مساحة  $\triangle ABC = 784$  سم<sup>2</sup>. أوجد:

أ مساحة  $\triangle ADE$

ب مساحة شبه المنحرف  $DECB$

الحل

في  $\triangle ADE$  و  $\triangle ABC$ :  $\therefore DE \parallel BC$

(نتيجة)  $\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$

(نظرية)  $\therefore \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \frac{\text{مساحة } (\triangle ADE)}{\text{مساحة } (\triangle ABC)}$

ويكون  $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{\text{مساحة } (\triangle ADE)}{784}$

$\therefore \text{مساحة شبه المنحرف } DECB = \text{مساحة } \triangle ABC - \text{مساحة } \triangle ADE$

$\therefore \text{مساحة شبه المنحرف } DECB = 784 - 144 = 640$  سم<sup>2</sup>

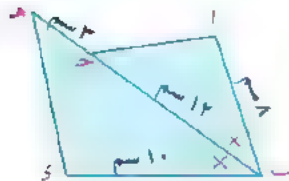
حاول أن تحل

١ في الشكل المقابل:

$DE$  منتصف  $AB$  و

$\text{مساحة } (\triangle ABC) = 48$  سم<sup>2</sup>

أوجد:  $\text{مساحة } (\triangle DEB)$



مثال

٢ النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين هي ٤ : ٩ فإذا كان محيط المثلث الأكبر ٩٠ سم

أوجد محيط المثلث الأصغر.

الحل

بفرض أن  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

$\therefore \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \frac{\text{مساحة } (\triangle ABC)}{\text{مساحة } (\triangle DEF)}$  ويكون  $\frac{4}{9} = \frac{AB}{DE}$

$\therefore \frac{\text{محيط } \triangle ABC}{\text{محيط } \triangle DEF} = \frac{AB}{DE} = \frac{4}{9}$

ويكون  $\frac{\text{محيط } (\triangle ABC)}{9} = \frac{4}{9}$

$\therefore \text{محيط } \triangle ABC = 60$  سم

حاول أن تحل

٢) أ ب ج د هـ هـ ومثلثان متشابهان ،  $\frac{مر(\Delta أ ب ج)}{مر(\Delta د هـ و)} = \frac{٣}{٤}$

أ إذا كان محيط المثلث الأصغر ٣٦٤٥ سم. أوجد محيط المثلث الأكبر.  
ب إذا كان هـ و = ٢٨ سم أوجد طول ب جـ.

مثال

٣) إذا كان كل ١ سم على الخريطة يمثل ١٠ كيلومترًا.  
أوجد المساحة الحقيقية التي يمثلها المثلث أ ب جـ لأقرب  
كيلو متر مربع إذا كان مر  $(\Delta أ ب جـ) = ٦,٤$  سم<sup>٢</sup>

الحل

$$\text{مقياس الرسم} = \text{معامل التشابه} = \frac{١}{١٠ \times ١٠}$$

$$\frac{\text{مساحة } \Delta أ ب جـ}{\text{المساحة الحقيقية}} = \text{مربع معامل التشابه}$$

$$\left(\frac{١}{١٠ \times ١٠}\right) = \frac{٦,٤}{\text{المساحة الحقيقية}}$$

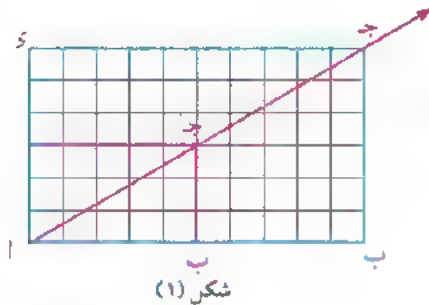
$$\text{المساحة الحقيقية} = ٦,٤ \times ١٠ \times ١٠ \times ١٠ \times ١٠ \times ١٠ \text{ سم}^2$$

$$\approx ٦٤٠ \text{ كم}^2$$

حاول أن تحل

٤) أ في الخريطة المينة أعلاه احسب مساحة المثلث د هـ و بالستيمترات المربعة واستخدمها في  
تقدير المساحة الحقيقية التي يمثلها لأقرب كيلو مربع.  
ب باستخدام إحدى خرائط جمهورية مصر العربية احسب مساحة شبه جزيرة سيناء لأقرب مائة كيلو  
متر مربع - قارن إجابتك مع زملائك.

ثانيًا النسبة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين The ratio between the area of two similar polygons



اعمل مع زميل لك لبحث إمكانية تقسيم المضلعين المتشابهين  
إلى نفس العدد من المثلثات التي يشابه كل منها نظيره.

١- ارسم مضلعين متشابهين كما في شكل (١)، شكل (٢).

٢- في شكل (١) ارسم  $\overline{أ جـ}$ . ماذا تلاحظ؟

٣- في شكل (٢) إرسم  $\vec{AO}$ ، ماذا تلاحظ؟ هل تجد تفسيراً لذلك؟

لاحظ أن

في المثلثين  $ABJ$ ،  $A'B'J'$ ،  $ABJ$

$\angle B = \angle B'$ ،  $\angle A = \angle A'$

فيكون  $\vec{BJ} \parallel \vec{B'J'}$

$\therefore \triangle ABJ \sim \triangle A'B'J'$

وبالمثل  $\angle C = \angle C'$ ،  $\angle B = \angle B'$

$\therefore \vec{BJ} \parallel \vec{B'J'}$  ويكون  $\triangle A'B'J' \sim \triangle A'B'J'$  وهكذا.

**حقيقة:** المضلعان المتشابهان يمكن أن ينقسما إلى نفس العدد من المثلثات التي يشابه كل منها نظيره.

**ملاحظة:** الحقيقة السابقة صحيحة مهما كان عدد الأضلاع

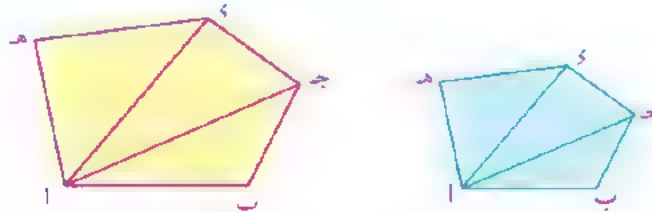
في المضلعين المتشابهين، (المضلعان المتشابهان لهما نفس

العدد من الأضلاع) فإذا كان عدد أضلاع المضلع =  $n$  ضلعاً

فإن عدد المثلثات التي يمكن أن ينقسم إليها المضلع (عن طريق أقطاره المشتركة في نفس الرأس) =  $n-2$  مثلثاً.

النسبة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين فيهما.

نظرية ٤



المعطيات: المضلع  $ABJ$   $\sim$  المضلع  $A'B'J'$

المطلوب:  $\frac{S(ABJ)}{S(A'B'J')} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$

البرهان: من  $A$ ، نرسم  $AJ$ ،  $AK$ ،  $AL$

$\therefore$  المضلع  $ABJ$   $\sim$  المضلع  $A'B'J'$

$\therefore$  فهما ينقسمان إلى نفس العدد من المثلثات، كل يشابه نظيره (حقيقة). ويكون:

$$\frac{S(ABJ)}{S(A'B'J')} = \frac{S(\triangle ABJ)}{S(\triangle A'B'J')} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2, \quad \frac{S(\triangle BJK)}{S(\triangle B'J'K')} = \left(\frac{BK}{B'J'K'}\right)^2, \quad \frac{S(\triangle KJL)}{S(\triangle K'J'L')} = \left(\frac{KL}{K'J'L'}\right)^2$$

(من تشابه المضلعين)

$$\therefore \frac{S(ABJ)}{S(A'B'J')} = \frac{S(\triangle ABJ)}{S(\triangle A'B'J')} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$$



$$\therefore \frac{(\Delta \text{أ ب ج})}{(\Delta \text{أ' ب' ج'})} = \frac{(\Delta \text{أ ج د})}{(\Delta \text{أ' ج' د'})} = \frac{(\Delta \text{أ ب د})}{(\Delta \text{أ' ب' د'})}$$

ومن خواص التناسب

$$\frac{(\Delta \text{أ ب ج})}{(\Delta \text{أ' ب' ج'})} = \frac{(\Delta \text{أ ب ج}) + (\Delta \text{أ ج د}) + (\Delta \text{أ ب د})}{(\Delta \text{أ' ب' ج'}) + (\Delta \text{أ' ج' د'}) + (\Delta \text{أ' ب' د'})}$$

$$\text{ويكون: } \frac{(\Delta \text{أ ب ج د})}{(\Delta \text{أ' ب' ج' د'})} = \frac{(\Delta \text{أ ب ج د})}{(\Delta \text{أ' ب' ج' د'})} \text{ وهو المطلوب}$$

حاول أن تحل

٤. إذا كان المضلع أ ب ج د ~ المضلع أ' ب' ج' د'، فأكتب ما يساويه كل من:

$$\frac{\text{م (المضلع أ ب ج د)}}{\text{م (المضلع أ' ب' ج' د')}} = \frac{\text{محيط المضلع أ ب ج د}}{\text{محيط المضلع أ' ب' ج' د'}}$$

ب إذا كان المضلعان أ ب ج د هـ، أ' ب' ج' د' هـ متشابهان والنسبة بين مساحتي سطحيهما ٤ : ٢٥

$$\text{فأكتب ما يساويه كل من: } \frac{\text{محيط المضلع أ ب ج د هـ}}{\text{محيط المضلع أ' ب' ج' د' هـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ' ب'}}$$

ج إذا كانت النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين ١ : ٤، مساحة المضلع الأول ٢٥ سم<sup>٢</sup>، أوجد مساحة المضلع الثاني.

د إذا كان طولاً ضلعين متناظرين في مضلعين متشابهين هما ١٢ سم، ١٦ سم، وكانت مساحة المضلع الأصغر = ١٣٥ سم<sup>٢</sup>، فأوجد مساحة المضلع الأكبر.

مثال

٤. أ ب ج د، س ص ع ل مضلعان متشابهان فيهما: (أ ب) = (س ص) = ٤٠°، س ص =  $\frac{٣}{٤}$  أ ب، ج د = ١٦ سم. احسب: أولاً: (س ل) ثانياً: طول ع ل ثالثاً: م (المضلع أ ب ج د) : م (المضلع س ص ع ل)

الحل

∴ المضلع أ ب ج د ~ المضلع س ص ع ل

$$\therefore \frac{(\Delta \text{أ ب ج د})}{(\Delta \text{س ص ع ل})} = \frac{(\Delta \text{أ ب ج د})}{(\Delta \text{س ص ع ل})} \text{ فيكون } (\Delta \text{س ص ع ل}) = ٤٠^\circ \text{ (المطلوب أولاً)}$$

$$\therefore \text{س ص} = \frac{٣}{٤} \text{ أ ب} \quad \therefore \frac{٣}{٤} = \frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} \text{ (من خواص التناسب)}$$

من تشابه المضلعين نجد أيضاً  $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ج د}}{\text{ع ل}}$

$$\therefore \frac{٣}{٤} = \frac{١٦}{\text{ع ل}} \text{ فيكون } \text{ع ل} = \frac{١٦ \times ٣}{٤} = ١٢ \text{ سم} \text{ (المطلوب ثانياً)}$$

$$\text{م (المضلع أ ب ج د)} : \text{م (المضلع س ص ع ل)} = (\text{أ ب})^2 : (\text{س ص})^2$$

$$= ١٦^2 : ٩^2$$

$$١٦ : ٩ \text{ (المطلوب ثالثاً)}$$

لاحظ أن

$$\text{أ ب} = ٤ \text{ ك}$$

$$\text{س ص} = ٣ \text{ ك}$$

$$\text{ك} \neq ٠$$

مثال

٥) النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين ٤ : ٣. إذا كان مجموع مساحتي سطحيهما ٢٢٥ سم<sup>٢</sup> فأوجد مساحة كل منهما.

الحل

- ∴ النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين = ٤ : ٣
- ∴ النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما = ٤ : ٣
- بقدر أن مساحة المضلع الأول = ٩ سم<sup>٢</sup> ، مساحة المضلع الثاني = ١٦ سم<sup>٢</sup>
- ∴ ٩ سم + ١٦ سم = ٢٥ سم ويكون  $\frac{9}{16+9} = \frac{225}{250}$
- ∴ مساحة المضلع الأول = ٩ × ٩ = ٨١ سم<sup>٢</sup>
- ∴ مساحة المضلع الثاني = ٩ × ١٦ = ١٤٤ سم<sup>٢</sup>

حاول أن تحل

٥) **اربط مع الزراعة:** مزرعتان على شكل مضلعين متشابهين، النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما ٥ : ٣، إذا كان الفرق بين مساحتهما ٣٢ فدأنا، فأوجد مساحة كل منهما.

مثال

٦) أ ب ج د، س ص ع ل مضلعان متشابهان. تقاطع قطري الأول في م وتقاطع قطري الثاني في ن. أثبت أن م (المضلع أ ب ج د) : م (المضلع س ص ع ل) = (م ج د) : (ن ع)

الحل

∴ المضلع أ ب ج د ~ المضلع س ص ع ل

∴  $\Delta$  أ ب ج د ~  $\Delta$  س ص ع

،  $\Delta$  د ب ج د ~  $\Delta$  ل ص ع

∴  $\Delta$  م ب ج د ~  $\Delta$  ن ص ع

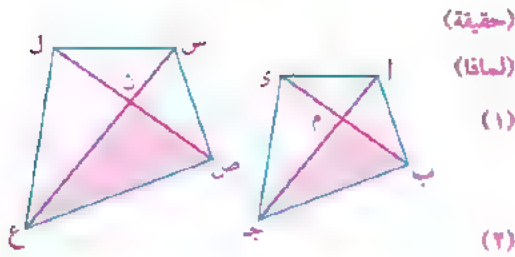
ويكون  $\frac{م ج د}{ن ع} = \frac{م ب ج د}{ن ص ع}$

∴ المضلع أ ب ج د ~ المضلع س ص ع ل

∴  $\frac{م (المضلع أ ب ج د)}{م (المضلع س ص ع ل)} = \frac{م (ب ج د)}{ن ع}$

من (١)، (٢) نستنتج أن:

م (المضلع أ ب ج د) : م (المضلع س ص ع ل) = م (ب ج د) : ن ع

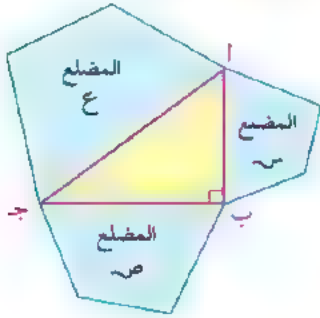


### حاول أن تحل

- ٦) أ ب ج د، س ص ع ل مضلعان متشابهان فإذا كانت م منتصف ب ج، ن منتصف ص ع فأثبت أن:  
مر (المضلع أ ب ج د) : مر (المضلع س ص ع ل) = (م د) : (ن ل)

### مثال

- ٧) أ ب ج د مثلث قائم الزاوية في ب، فإذا كانت أ ب، ب ج، أ ج أضلاع متناظرة لثلاثة مضلعات متشابهة منشأة على أضلاع المثلث أ ب ج وهي على الترتيب: المضلع س، المضلع ص، المضلع ع. فأثبت أن مر (المضلع س) + مر (المضلع ص) = مر (المضلع ع)



### الحل

$$\therefore \frac{\text{مر (المضلع س)}}{\text{مر (المضلع ع)}} = \frac{\text{مر (المضلع ص)}}{\text{مر (المضلع ع)}} \quad \therefore \frac{\text{مر (المضلع س)}}{\text{مر (المضلع ع)}} = \frac{\text{مر (المضلع ص)}}{\text{مر (المضلع ع)}}$$

$$\therefore \frac{\text{مر (المضلع س)}}{\text{مر (المضلع ع)}} = \frac{\text{مر (المضلع ص)}}{\text{مر (المضلع ع)}} \quad \therefore \frac{\text{مر (المضلع س)}}{\text{مر (المضلع ع)}} = \frac{\text{مر (المضلع ص)}}{\text{مر (المضلع ع)}}$$

$$\therefore \frac{\text{مر (المضلع س)}}{\text{مر (المضلع ع)}} + \frac{\text{مر (المضلع ص)}}{\text{مر (المضلع ع)}} = \frac{\text{مر (المضلع س)}}{\text{مر (المضلع ع)}} + \frac{\text{مر (المضلع ص)}}{\text{مر (المضلع ع)}}$$

$$(1) \quad \frac{\text{مر (المضلع س)}}{\text{مر (المضلع ع)}} + \frac{\text{مر (المضلع ص)}}{\text{مر (المضلع ع)}} = \frac{\text{مر (المضلع س)}}{\text{مر (المضلع ع)}} + \frac{\text{مر (المضلع ص)}}{\text{مر (المضلع ع)}}$$

$$(2) \quad \frac{\text{مر (المضلع س)}}{\text{مر (المضلع ع)}} + \frac{\text{مر (المضلع ص)}}{\text{مر (المضلع ع)}} = \frac{\text{مر (المضلع س)}}{\text{مر (المضلع ع)}} + \frac{\text{مر (المضلع ص)}}{\text{مر (المضلع ع)}}$$

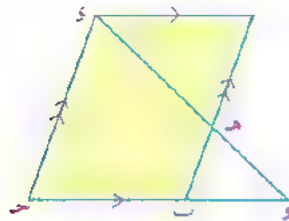
$$\text{من (1)، (2) ينتج أن } \frac{\text{مر (المضلع س)}}{\text{مر (المضلع ع)}} + \frac{\text{مر (المضلع ص)}}{\text{مر (المضلع ع)}} = \frac{\text{مر (المضلع س)}}{\text{مر (المضلع ع)}} + \frac{\text{مر (المضلع ص)}}{\text{مر (المضلع ع)}}$$

$$\text{ويكون مر (المضلع س) + مر (المضلع ص) = مر (المضلع ع)}$$

### حاول أن تحل

- ٧) أ ب ج د مثلث قائم الزاوية في أ، فيه أ ب = ٥ سم، ب ج = ١٣ سم، حيث أ ب، ب ج، أ ج أضلاع متناظرة لثلاثة مضلعات متشابهة ل، م، ن منشأة على أضلاع المثلث أ ب ج من الخارج على الترتيب. فإذا كانت مساحة المضلع ل تساوي ١٠٠ سم<sup>٢</sup> أوجد مساحة سطح كل من المضلعين م، ن.

### تحقق من مشمتك



في الشكل المقابل: أ ب ج د متوازي أضلاع،

$$\text{هـ} \in \overline{\text{أ ب}} \text{ حيث } \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ب}} = \frac{٢}{٣}، \text{ و } \overline{\text{هـ د}} \cap \overline{\text{أ ب}} = \text{ج ب} = \text{و}$$

$$١) \text{ أثبت أن } \Delta \text{ هـ ج د} \sim \Delta \text{ هـ د أ}$$

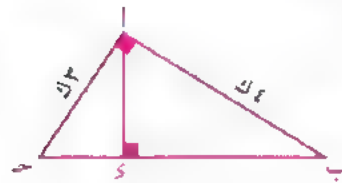
$$٢) \text{ أوجد } \frac{\text{مر } (\Delta \text{ هـ ج د})}{\text{مر } (\Delta \text{ هـ د أ})}$$

## تمارين ٢ - ٣

١ أكمل:

١ إذا كان  $\Delta$  ا ب ج  $\sim \Delta$  س ص ع، وكان ا ب = ٣ ص فإن  $\frac{\text{مس}(\Delta \text{ س ص ع})}{\text{مس}(\Delta \text{ ا ب ج})} =$  .  
 ٢ إذا كان  $\Delta$  ا ب ج  $\sim \Delta$  و ه و، مس  $(\Delta \text{ ا ب ج}) = ٩$  مس  $(\Delta \text{ و ه و})$  وكان و ه = ٤ سم فإن:  
 ا ب = \_\_\_\_\_ سم

٢ ادرس كلًا من الأشكال التالية، حيث ك ثابت تناسب، ثم أكمل:



و  $(\Delta \text{ ا ب ج}) = ٩٠^\circ$ ، أي  $\perp$  ا ب ج  
 مس  $(\Delta \text{ ا ب ج}) = ١٨٠$  سم<sup>٢</sup> فإن:  
 مس  $(\Delta \text{ ا ب ج}) =$  \_\_\_\_\_ سم<sup>٢</sup>



ا ب ج  $\cap$  ج د ه = {ه}  
 مس  $(\Delta \text{ ا ب ج}) = ٩٠٠$  سم<sup>٢</sup>  
 فإن: مس  $(\Delta \text{ و ه ب}) =$  \_\_\_\_\_ سم<sup>٢</sup>

٣ ا ب ج مثلث، و  $\exists$  ا ب حيث ا ب = ٢ ب و، ه  $\exists$  ا ج حيث و ه // ا ب ج.  
 إذا كانت مساحة  $\Delta$  ا و ه = ٦٠ سم<sup>٢</sup>. أوجد مساحة شبه المنحرف و ب ج ه.

٤ ا ب ج مثلث قائم الزاوية في ب، رسمت المثلثات المتساوية الأضلاع ا ب س، ب ج ص، ا ج ع.  
 أثبت أن: مس  $(\Delta \text{ ا ب س}) +$  مس  $(\Delta \text{ ب ج ص}) =$  مس  $(\Delta \text{ ا ج ع})$ .

٥ ا ب ج مثلث فيه  $\frac{ا ب}{ب ج} = \frac{٤}{٦}$ ، رسمت الدائرة المارة برؤوسه. من نقطة ب رسم المماس لهذه الدائرة فقطع

$$\frac{٧}{١٦} = \frac{\text{مس}(\Delta \text{ ا ب ج})}{\text{مس}(\Delta \text{ ا ب ه})}$$

٦ ا ب ج و متوازي أضلاع  $\exists$  ا ب، س  $\exists$  ا ب حيث ب س = ٢ ا ب، ص  $\exists$  ج ب، ص  $\exists$  ج ب

حيث ب ص = ٢ ب ج، رسم متوازي الأضلاع ب س ع ص أثبت أن:  $\frac{١}{٤} = \frac{\text{مس}(\Delta \text{ ا ب ج و})}{\text{مس}(\Delta \text{ ب س ع})}$

٧) ا ب ج مثلث قائم الزاوية في ب، ب ي لـ ا ج يقطعة في ي، رُسم على ا ب، ب ج المربعان

اس ص ب، ب م ن ج خارج المثلث ا ب ج

أ أثبت أن المضلع و اس ص ب ~ المضلع و ب م ن ج

ب إذا كان ا ب = ٦ سم، ا ج = ١٠ سم. أوجد النسبة بين مساحتي سطحي المضلعين.

٨) ا ب ج مثلث، ا ب، ب ج، ا ج أضلاع متناظرة لثلاثة مضلعات متشابهة مرسومة خارج المثلث، وهي

المضلعات بين س، ص، ع على الترتيب.

فإذا كانت مساحة المضلع س = ٤٠ سم<sup>٢</sup>، ومساحة المضلع ص = ٨٥ سم<sup>٢</sup>، ومساحة المضلع ع = ١٢٥ سم<sup>٢</sup>.

أثبت أن المثلث ا ب ج قائم الزاوية.

٩) ا ب ج د مربع قسمت ا ب، ب ج، ج د، د ا بالنقاط س، ص، ع، ل على الترتيب بنسبة ١ : ٣

أثبت أن:

$$\frac{\text{مساحة المربع س ص ع ل}}{\text{مساحة المربع ا ب ج د}} = \frac{٥}{٨}$$

١٠) صالة ألعاب مستطيلة الشكل أبعادها ٨ متر، ١٢ متر، تم تغطية أرضيتها بالخشب، فكلفت ٣٢٠٠ جنيه.

احسب (باستخدام التشابه) تكاليف تغطية أرضية صالة مستطيلة أكبر بنفس نوع الخشب ونفس

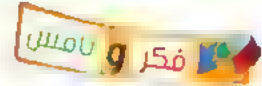
الأسعار، إذا كان أبعادها ١٤، ٢١ من الأمتار.

## تطبيقات التشابه في الدائرة

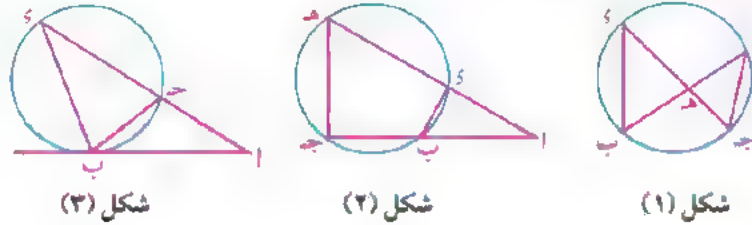
### Applications of Similarity in the circle

#### سوف تتعلم

- العلاقة بين وترين متقاطعين في دائرة.
- العلاقة بين قاطعين لدائرة من نقطة خارجها
- العلاقة بين طول مماس وطول جزأي قاطع لدائرة مرسومين من نقطة خارجها
- نمذجة وحل مشكلات وتطبيقات حياتية باستخدام تشابه المثلثات في الدائرة.



في كل من الأشكال الآتية مثلثان متشابهان. اكتب المثلثين بترتيب تطابق زواياهما واستنتج تناسب الأضلاع المتناظرة.



ك في شكل (١): هل توجد علاقة بين  $هـ \times ا$  و  $هـ \times ب$  ،  $هـ \times ج$  و  $هـ \times د$  ؟

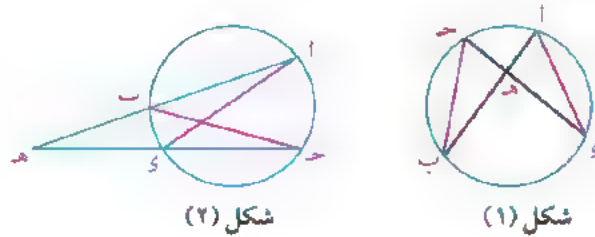
ك في شكل (٢): هل توجد علاقة بين  $اهـ \times ا$  و  $اهـ \times ب$  ،  $اجـ \times ا$  و  $اجـ \times ب$  ؟

ك في شكل (٣): هل توجد علاقة بين  $اهـ \times ا$  و  $اجـ \times ا$  ،  $(اب)^2$  ؟

#### نميز مشهور

إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للوترين  $اب$  ،  $جـ د$  لدائرة في نقطة  $هـ$  فإن:

$$هـ \times ا = هـ \times ب = هـ \times ج = هـ \times د$$



لاستنتاج ذلك.

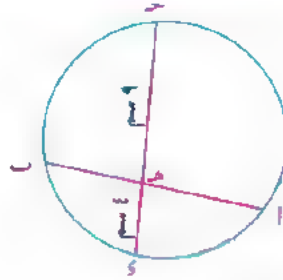
ك ارسم  $اهـ$  ،  $بـ جـ$

ك في كل من الشكلين أثبت أن المثلثين  $هـ ا د$  ،  $هـ ج ب$  متشابهان فيكون:

$$\frac{هـ ا}{هـ ج} = \frac{هـ د}{هـ ب} \quad , \quad هـ \times ا = هـ \times ب = هـ \times ج = هـ \times د$$

Chord	وتر
Secant	قاطع
Tangent	مماس
Diameter	قطر
	مماس خارجي مشترك
Common External Tangent	
	مماس داخلي مشترك
Common Internal Tangent	
	دوائر متحدة المركز
Concentric Circles	

### مثال



١) في الشكل المقابل:  $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{H\}$

وإذا كان  $\frac{AH}{HB} = \frac{CH}{HD}$ ،  $HD = 9$  سم ،  $HD = 4$  سم  
أوجد طول  $\overline{HB}$

الحل

$$\therefore \frac{AH}{HB} = \frac{CH}{HD} \quad \therefore HA = 4 \text{ ك} , \quad HB = 3 \text{ ك} \quad \text{حيث } K \neq 0$$

(تمرين مشهور)

$$\therefore \overline{AB} \cap \overline{CD} = \{H\} \quad \therefore HA \times HB = HD \times HC$$

$$\text{فيكون: } 4 \times 9 = 3 \times K$$

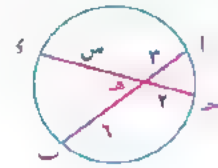
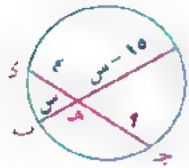
$$36 = 3K$$

$$K = 12$$

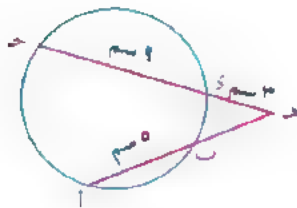
$$K = 12 \quad , \quad HB = 3 \times 12 = 36 \text{ سم}$$

حاول أن تحل

١) أوجد قيمة س في كل من الأشكال الآتية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)



### مثال



٢) في الشكل المقابل:  $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{H\}$  ،  $AB = 5$  سم ،

$CD = 9$  سم ،  $HD = 3$  سم. أوجد طول  $\overline{HB}$

الحل

بفرض أن  $BH = S$  سم.

$$\therefore \overline{AB} \cap \overline{CD} = \{H\} \quad \therefore HB \times HA = HD \times HC$$

$$\text{فيكون: } S(5 + 3) = (9 + 3) \times 3$$

$$S(8) = 36 \quad \text{س} + 5 = 36$$

$$(8 - S) = (9 + 3) \times 3$$

$$\therefore S = 4 \quad , \quad S = 9 \text{ مرفوض}$$

$$\therefore \text{طول } \overline{HB} = 4 \text{ سم.}$$

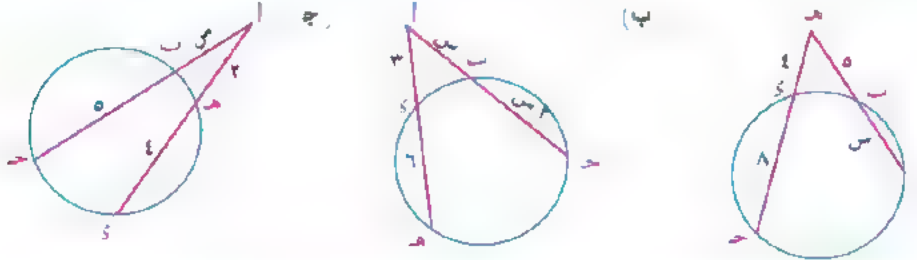
(تمرين مشهور)



حاول أن تحل

٢ أوجد قيمة س في كل من الأشكال الآتية

(الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)



نتيجته

إذا كانت م نقطة خارج دائرة، م جـ يمس الدائرة في جـ، م ب يقطعها في أ، ب فإن  
(م جـ)² = م أ × م ب.

في الشكل المقابل: م جـ مماس للدائرة  
م ب يقطع الدائرة في أ، ب  
∴ (م جـ)² = م أ × م ب

مثال

٢ في الشكل المقابل: هـ أ مماس للدائرة،

هـ جـ يقطع الدائرة في د، جـ على الترتيب.

حيث هـ د = ٤ سم، جـ د = ٥ سم، أوجد طول هـ أ

الحل

∴ هـ أ مماس، هـ جـ قاطع للدائرة

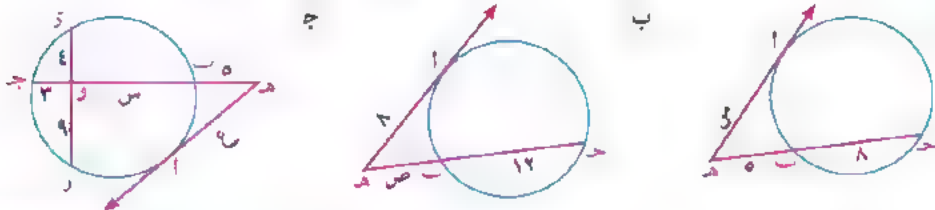
∴ (هـ أ)² = هـ د × هـ جـ (نتيجة)

$$(هـ أ)² = (٤ + ٥) × ٤ = ٣٦$$

$$∴ هـ أ = ٦ سم$$

حاول أن تحل

٢ في كل من الأشكال التالية هـ أ مماس للدائرة. أوجد قيم س، ص، ع العنودية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)



### عكس تمرين مشهور

إذا تقاطع المستقيمان الحاويزان للقطعتين  $\overline{AB}$ ،  $\overline{CD}$  في نقطة  $H$  (مختلفة عن  $A$ ،  $B$ ،  $C$ ،  $D$ ) وكان  $HA \times HB = HD \times HC$  فإن: النقطة  $H$  تقع على دائرة واحدة.

### لاحظ أن:

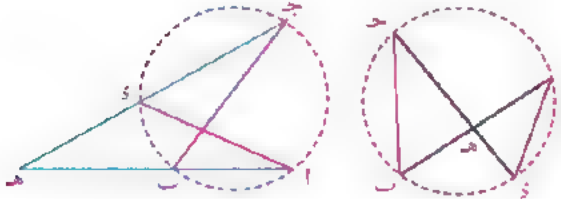
$$HA \times HB = HD \times HC$$

$$\frac{HA}{HD} = \frac{HC}{HB}$$

$\triangle HAD \sim \triangle HCB$  لماذا؟

$\triangle HAD \sim \triangle HCB$  لماذا؟

$\triangle HAD \sim \triangle HCB$ ،  $H$ ،  $B$ ،  $C$  تقع على دائرة واحدة؟ فسر إجابتك.



### مثال

④  $AB$  جد مثلث فيه  $AB = 15$  سم،  $AC = 12$  سم،  $AD = 4$  سم،  $AE = 5$  سم، حيث  $AD \cap \overline{BC} = E$  حيث  $AE = 5$  سم. أثبت أن الشكل  $ABCE$  رباعي دائري.

### الحل

$$AE \times AB = 5 \times 15 = 75$$

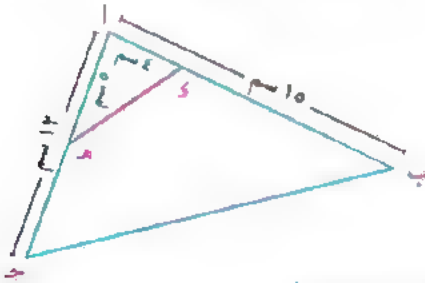
$$AD \times AC = 12 \times 5 = 60$$

$$AE \times AB = AD \times AC$$

$$\therefore \overline{AE} \cap \overline{BC} = E, \therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$$

$\therefore$  النقطة  $E$ ،  $B$ ،  $C$  تقع على دائرة واحدة.

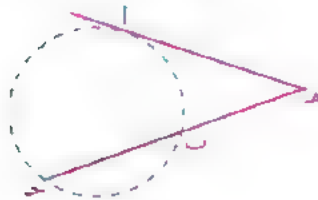
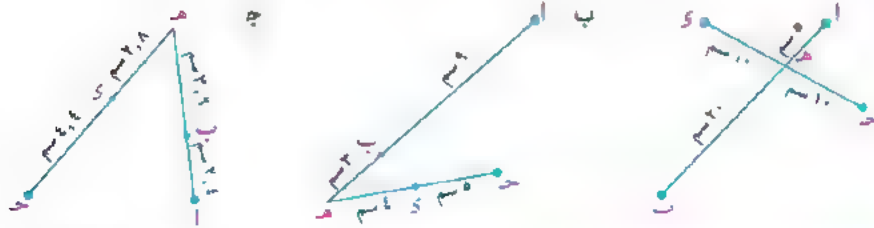
ويكون الشكل  $ABCE$  رباعياً دائرياً.



(عكس تمرين مشهور)

### حاول أن تحل

④ في أي من الأشكال التالية تقع النقطة  $H$ ،  $B$ ،  $C$  على دائرة واحدة؟ فسر إجابتك.



إذا كان  $HA \times HB = HD \times HC$

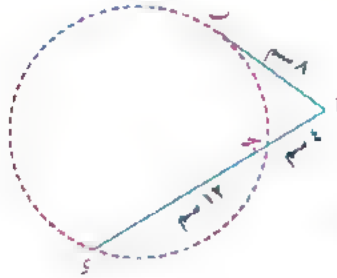
فإن  $H$  تقع على الدائرة المارة بالنقط  $A$ ،  $B$ ،  $C$ .

نتيجة

## مثال

- ٥)  $AB$  جذ مثلث فيه  $AB = 8$  سم،  $AC = 4$  سم،  $BC = 12$  سم، حيث  $AB$  تماس الدائرة المارة بالنقط  $B$ ،  $C$ ،  $A$ .  
أثبت أن  $AB$  تماس الدائرة المارة بالنقط  $B$ ،  $C$ ،  $A$ .

الحل



$$AB \times AC = 8 \times 4 = 32$$

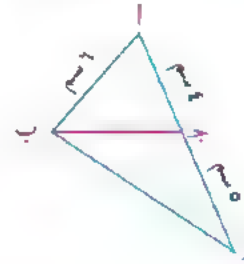
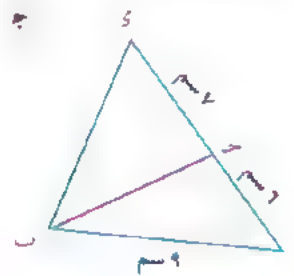
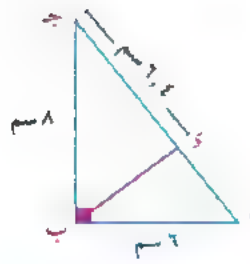
$$AB^2 = 8^2 = 64$$

$$AB \times AC = AB^2$$

$\therefore AB$  تماس الدائرة المارة بالنقط  $B$ ،  $C$ ،  $A$  عند النقطة  $A$ .

حاول أن تحل

- ٥) في أي من الأشكال الآتية يكون  $AB$  مماسًا للدائرة المارة بالنقط  $B$ ،  $C$ ،  $A$ .

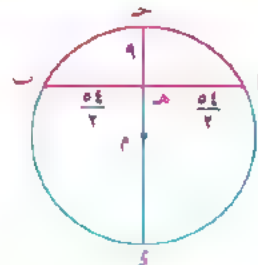


## مثال

- ٦) تطبيقات حياتية: الربط مع الجيولوجيا: في إحدى

المناطق الساحلية توجد طبقة أرضية على شكل قوس طبيعي. وجد الجيولوجيون أنه قوس دائرة كما في الشكل المقابل. أوجد طول نصف قطر دائرة القوس.

الحل



بفرض أن طول نصف قطر دائرة القوس =  $r$  مترًا

$\therefore AB$ ،  $CD$  وتران متقاطعان في  $E$

$$AE \times EB = CE \times ED$$

$$4 \times 5 = (r - 4) \times 9$$

$$20 = 9r - 36$$

$$56 = 9r$$

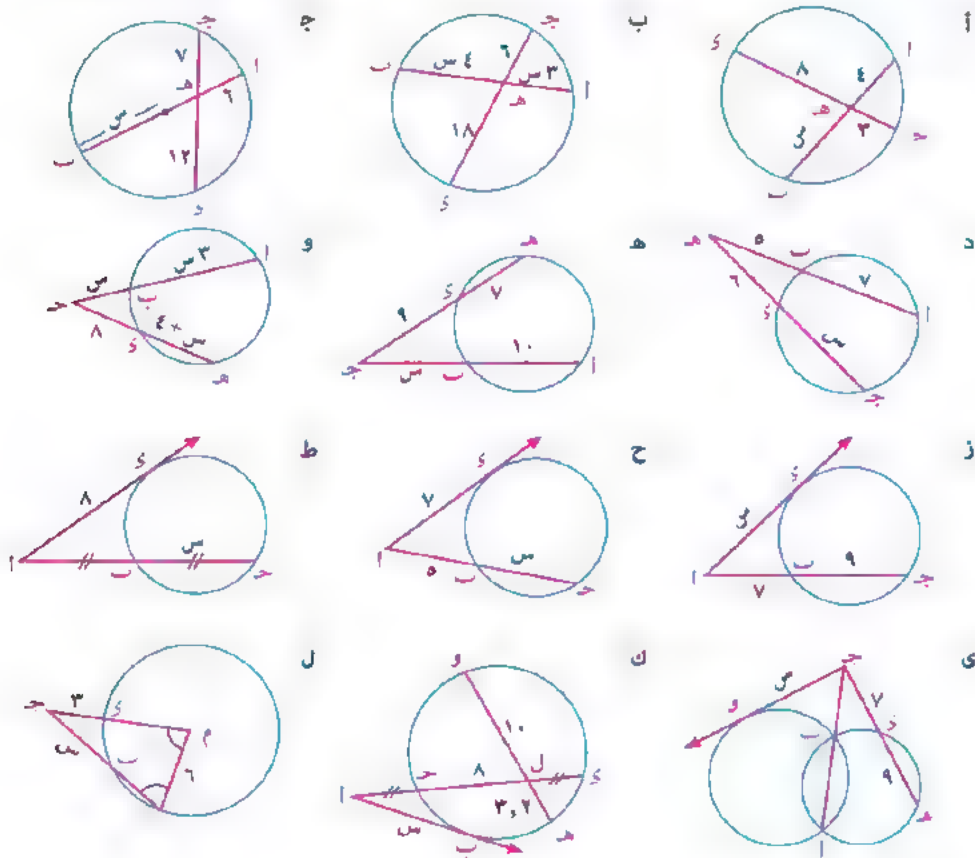
أي أن طول نصف قطر دائرة القوس يساوي ٤٥ مترًا.



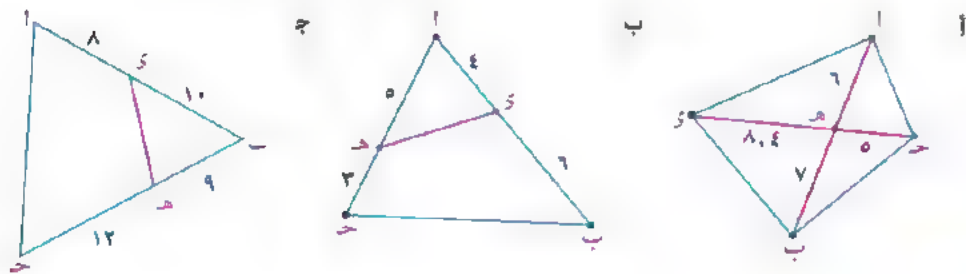
## تمارين ٢-٤



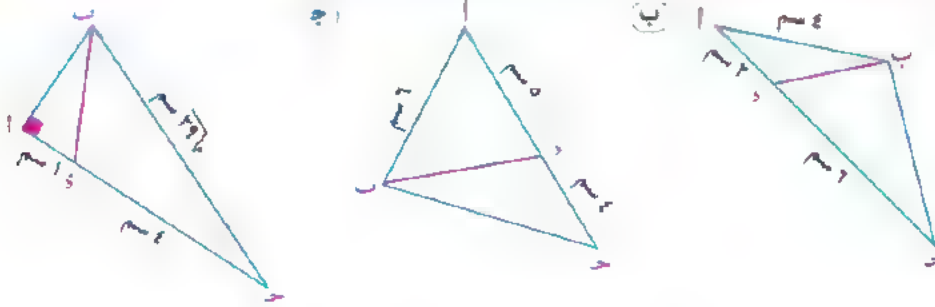
١) باستخدام الآلة الحاسبة أو الحساب العقلي، أوجد قيمة  $s$  العددية في كل من الأشكال التالية.  
(الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)



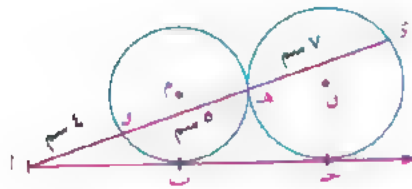
٢) في أي من الأشكال التالية تقع النقاط أ، ب، ج، د على دائرة واحدة؟ فسر إجابتك.  
(الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)



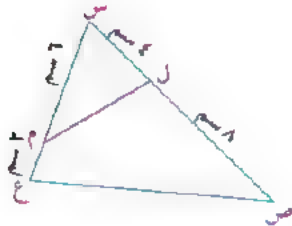
٢) في أي من الأشكال التالية  $\overline{AB}$  مماس للدائرة المارة بالنقط ب، ج، و.



٤) دائرتان متقاطعتان في أ، ب. جـ  $\in \overline{AB}$ ، جـ هـ  $\overline{AB}$  رُسم من جـ القطعتان جـ س، جـ ص مماستان للدائرتين عند س، ص. أثبت أن جـ س = جـ ص



٥) في الشكل المقابل: الدائرتان م، ن متماستان عند هـ  $\overline{AJ}$  يمس الدائرة م عند ب، ويمس الدائرة ن عند جـ  $\overline{AH}$  يقطع الدائرتين عند و، و على الترتيب حيث أ و = هـ س، و هـ = هـ س، هـ و = هـ س. أثبت أن ب منتصف  $\overline{AJ}$



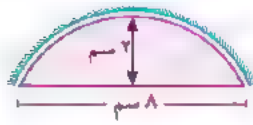
٦) في الشكل المقابل: ل  $\in \overline{CS}$  حيث س ل = هـ س، ص ل = هـ س، م  $\in \overline{CS}$  حيث س م = هـ س، ع م = هـ س. أثبت أن:  $\Delta س ل م \sim \Delta س ع ص$  ب الشكل ل ص ع م رباعي دائري.

٧)  $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{هـ\}$ ، أ هـ = هـ ب، و هـ = هـ ج، إذا كان ب هـ = هـ س، ج هـ = هـ س. أثبت أن النقط أ، ب، ج، و تقع على دائرة واحدة.

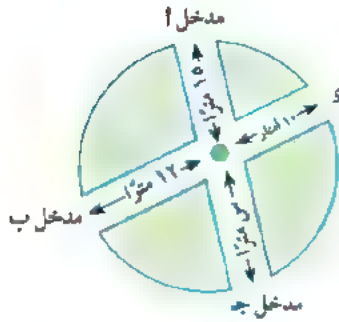
٨) أ ب ج مثلث، و  $\in \overline{AB}$  حيث و ب = هـ س، و ج = هـ س. إذا كان أ ج = هـ س. أثبت أن:  $\Delta أ ج و \sim \Delta ب ج و$  ج هـ (أ ب و) : هـ (أ ب ج) = ٩ : ٥

٩) دائرتان متحدتا المركز م، طولاً نصفى قطريهما ١٢ سم، ٧ سم، رسم الوتر  $\overline{AO}$  في الدائرة الكبرى ليقطع الدائرة الصغرى في ب، ج على الترتيب. أثبت أن: أ ب  $\times$  ب و = ٩٥

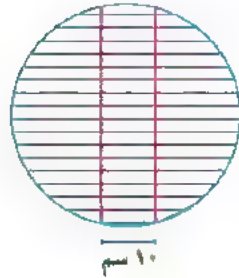
- ١٠) ا ب ج د مستطيل فيه ا ب = ٦ سم، ب ج = ٨ سم. رسم ب ه  $\perp$  ا ج فقطع ا ج في ه، ا د في و. ا أثبت أن (ا ب) = ٢ (ا و) × ا د. ب أوجد طول ا و.



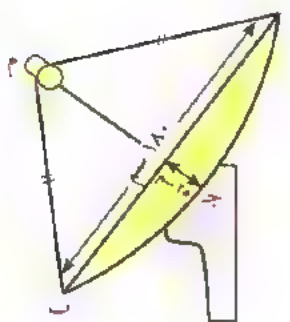
- ١١) **الربط مع الصناعة:** كُسر أحد تروس آلة ولاستبداله مطلوب معرفة طول نصف قطر دائرته. يبين الشكل المقابل جزءًا من هذا الترس، والمطلوب تعيين طول نصف قطر دائرته.



- ١٢) **الربط مع البيئة:** يبين الشكل المقابل مخططًا لحديقة على شكل دائرة بها طريقان يتقاطعان عند نافورة المياه. أوجد بُعد نافورة المياه عند المدخل جـ.



- ١٣) **الربط مع المنزل:** تستخدم هدى شبكة لشي اللحوم على شكل دائرة من السلك، طول قطرها ٥٠ سم، يدعمها من الوسط سلكان متوازيان ومتساويان في الطول كما في الشكل المقابل، والبعد بينهما ١٠ سم. احسب طول كل من سلكي الدعامة.



- ١٤) **الربط مع الاتصال:** تنقل الأقمار الصناعية البرامج التلفزيونية إلى كافة مناطق الأرض، وتستخدم أطباق خاصة لاستقبال إشارات البث التلفزيوني، وهي أطباق مقعرة على شكل جزء من سطح كرة. يبين الشكل المقابل مقطعًا في أحد هذه الأطباق، طول قطره ١٨٠ سم، والمطلوب حساب طول نصف قطر كرة ثقبه م أ.

## ملخص الوحدة

### Two Similar Polygons

### المضلعان المتشابهان

يتشابه مضلعان لهما نفس العدد من الأضلاع إذا كانت الزوايا المتناظرة متطابقة وأطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة

### Similarity Ratio

### نسبة التشابه (معامل التشابه)

إذا كان المضلع  $A'B'C'D'$  ~ المضلع  $ABCD$  يكون له معامل تشابه المضلع  $ABCD$  جـ  $جـ'$  /  $د'$  للمضلع  $ABCD$  حيث  $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA} = k$  ،  $k \neq 0$  .  
النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين تساوي معامل تشابههما

**مسلمة:** قضية أو عبارة رياضية يسلم بصحتها دون برهان ويستنتج منها حقائق تتعلق بالنظام، مثل: «إذا طابقت زاويتان في مثلث نظائرها في مثلث آخر كان المثلثان متشابهين».

**نتيجة (١):** إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين أو المستقيمين الحاملين لهما فإن المثلث الناتج يشابه المثلث الأصلي.

**نتيجة (٢):** إذا رسم من رأس القائمة في المثلث القائم الزاوية عمود على الوتر انقسم المثلث إلى مثلثين، وكلاهما يشابه المثلث الأصلي.

**نظرية ١:** إذا تناسبت الأضلاع المتناظرة في مثلثين فإنهما يتشابهان.

**نظرية ٢:** إذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر، وتناسبت أطوال الأضلاع التي تحتويها هاتان الزاويتان كان المثلثان متشابهين.

### The relation between the area of two similar polygons

### العلاقة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين

**نظرية ٣:** النسبة بين مساحتي سطحين مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما.

**حقيقة:** المضلعان المتشابهان يمكن أن ينقسما إلى نفس العدد من المثلثات التي يشابه كل منها نظيره.

**نظرية ٤:** النسبة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما.

### معلومات إضافية

قم بزيارة المواقع الآتية:







الهندسة

## نظريات التناسب في المثلث

### The Triangle Proportionality Theorems

معدن حشيشوت بالاقصر

في نهاية الوحدة يكون الطالب قادرًا على أن:

- يعرف ويبرهن النظرية التي تنص على (إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع المثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أحدهما متناسبة) وعكسها، ونتائج غيرها.
- يعرف ويبرهن نظرية تاليس العامة التي تنص على: (إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية فإن أطوال انقطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال انقطع الناتجة على القاطع الآخر.) وحالات خاصة منها.
- يعرف ويبرهن النظرية التي تنص على: (إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس،
- قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو الخارج إلى جزأين السبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولى الضلعين الآخرين) وحالات خاصة منها.
- يوجد قوة نقطة بالنسبة لدائرة (القواطع والمماسات).
- يستنتج قياسات الروايات الناتجة من تقاطع الأوتار والمماسات في دائرة.
- يحل تعيقات تشمل إيجاد طول المنصف الداخلي والخارجي.

المصطلحات الأساسية

منصف خارجي	Bisector	منصف	Midpoint	نقطة تنصيف	Ratio	نسبة
Exterior Bisector		منصف داخلي	Median	متوسط	Proportion	تناسب
Perpendicular	عمودي على	Interior Bisector	Transversal	قاطع	Parallel	يوازي

كوبرى السلام، قناة السويس

## دروس الوحدة

الدرس (٣ - ١): المستقيمات المتوازية

والأجزاء المتناسبة.

الدرس (٣ - ٢): منصف الزاوية والأجزاء

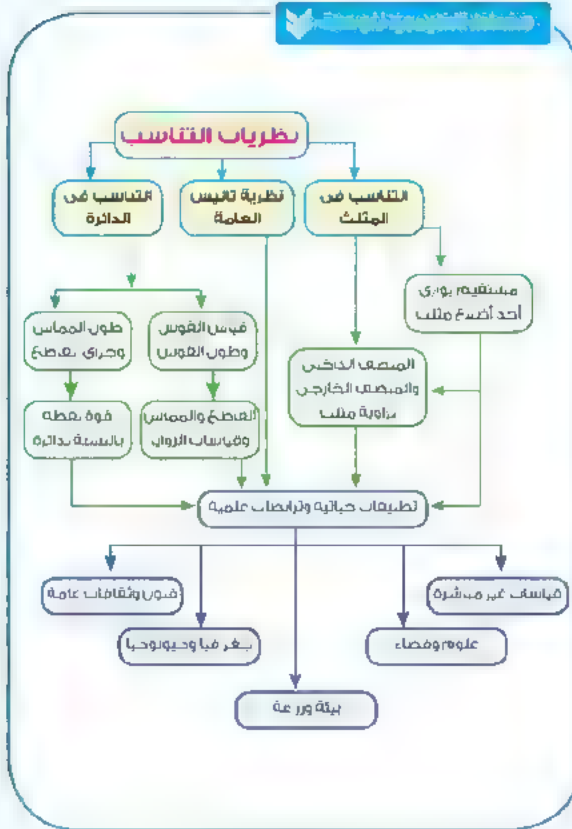
المتناسبة.

الدرس (٣ - ٣): تطبيقات التناسب فى الدائرة.

## المستويات الهندسية

أدوات هندسية للرسم والقياس - حاسب آلى -  
برامج رسومية - جهاز عرض بيانات ورقى مربعات  
- خيوط - مقص

## مستويات الهندسة



الرياضيات نشاط فكري ممتع يجعل الذهن متفتحاً، والعقل صحواً، وتسهم فى حل كثير من المشكلات والتحديات العملية والعلمية والحياتية، من خلال تمثيلها أو نمذجتها بعلاقات بلغة الرياضيات ورموزها، ليتم حلها، ثم إعادتها إلى أصولها المادية.

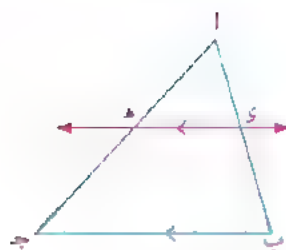
فطن قدماء المصريين لذلك فأقاموا المعابد والأهرامات وفق خطوط مستقيمة بعضها متوازى والآخر قاطع لها، كما حثروا الأراضي الزراعية فى خطوط مستقيمة متوازية، وقد أخذ الإغريق الهندسة عن المصريين القدماء فوضع إقليدس (٣٠٠ ق.م) نظاماً هندسياً متكافئاً عرف بالهندسة الإقليدية وتقوم على مسمات خمس، أهمها: مسلمة التوازى وهى "من نقطة خارج مستقيم يمكن رسم مستقيم واحد فقط يمر بتلك النقطة ويتوازى مستقيماً معلوماً". وتُعنى الهندسة الإقليدية بالأشكال المستوية (المثلثات - المضلعات - الدوائر) والأشكال ثلاثية الأبعاد، كما أن لها تطبيقات عملية فى مجالات متعددة منها إنشاء لطرق والكبارى وتحطيط المدن وإعداد خرائطها التى تعتمد على توازى المستقيمات والمستقيمات القاطعة لها وفق تناسب بين لطول الحقيقى والطول فى الرسم (مقياس الرسم).

# المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

## Parallel Lines and Proportional Parts

٣ - ١

سوف نتعلم



١- ارسم المثلث  $أ ب ج$ ، عين نقطة  $د$  على  $أ ب$

ثم ارسم  $د هـ$  //  $ب ج$  ويقطع  $أ ج$  في  $هـ$

٢- أوجد بالقياس طول كل من:

$أ د$ ،  $ب د$ ،  $أ هـ$ ،  $هـ ج$

٣- احسب النسبتين  $\frac{أ د}{ب د}$ ،  $\frac{أ هـ}{هـ ج}$  وقارن بينهما. ماذا تلاحظ؟

إذا تغير موقع  $د هـ$  محافظاً على توازيه مع  $ب ج$ .

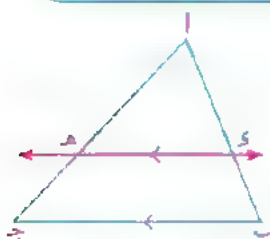
هل تتغير العلاقة بين  $\frac{أ د}{ب د}$ ،  $\frac{أ هـ}{هـ ج}$ ؟ ماذا نستنتج؟

- « خصائص المستقيم الموازي لأى ضلع من أضلاع مثلث.
- « استخدام الناحية في حساب أطوال وبرهنة علاقات تقاطع مستقيمة ناتجة عن قواطع لمستقيمتين متوازيتين.
- « نمذجة وحل مشكلات حياتية تتضمن المستقيمتين المتوازيتين وخواصهما.

### المصطلحات الأساسية

Parallel	« موازى
Midpoint	« منتصف
Median	« متوسط
Transversal	« قاطع

**نظرية**  
إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع المثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة.



المعطيات:  $أ ب ج$  مثلث،  $د هـ$  //  $ب ج$

المطلوب:  $\frac{أ د}{ب د} = \frac{أ هـ}{هـ ج}$

البرهان:  $\therefore د هـ$  //  $ب ج$

$\therefore \Delta أ ب ج \sim \Delta أ د هـ$  (مسلمة التشابه)

ويكون:  $\frac{أ د}{ب د} = \frac{أ هـ}{هـ ج}$  (١)

$\therefore د هـ$  //  $ب ج$

$\therefore أ د + أ هـ = أ ج$ ،  $ب د + هـ ج = ب ج$  (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن:

$$\frac{أ د + أ هـ}{ب د + هـ ج} = \frac{أ د}{ب د}$$

$$\text{ويكون: } \frac{أ د}{ب د} + \frac{أ هـ}{ب د} = \frac{أ د}{ب د} + \frac{أ هـ}{هـ ج}$$

$$١ + \frac{أ هـ}{ب د} = \frac{أ د}{ب د} + \frac{أ هـ}{هـ ج}$$

$$\therefore \frac{أ هـ}{ب د} = \frac{أ هـ}{هـ ج}$$

ومن خواص التناسب نجد أن:  $\frac{أ د}{ب د} = \frac{أ هـ}{هـ ج}$  (وهو المطلوب)

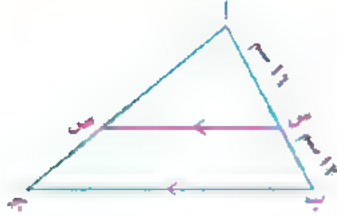
### الأدوات والوسائل

- « أدوات هندسية للرسم والقياس.
- « حاسب آلي.
- « برامج رسومية.
- « جهاز عرض بيانات.

لاحظ أن:  $\frac{اي}{وب} = \frac{اه}{هـج}$   $\therefore \frac{اي + وب}{وب} = \frac{اه + هـج}{هـج}$

أي أن:  $\frac{اي}{وب} = \frac{اب}{وب}$   $\frac{اي}{وب} = \frac{اب}{وب}$

مثال



١) في الشكل المقابل:  $س ص // ب ج$ ،  $اس = ١٦$  سم،  $ب س = ١٢$  سم.

أ إذا كان  $اص = ٢٤$  سم، أوجد  $ص ج$ .

ب إذا كان  $ج ص = ٢١$  سم، أوجد  $ا ج$ .

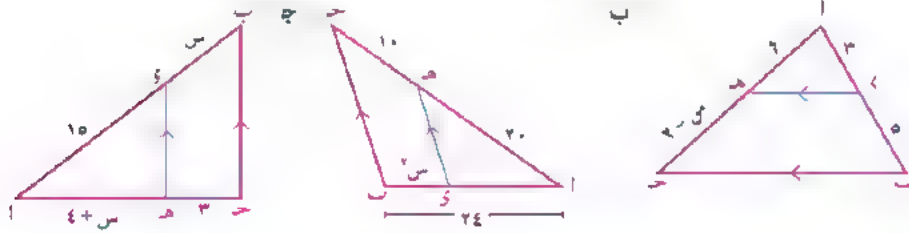
الحل

أ  $\therefore س ص // ب ج$   $\therefore \frac{اس}{س ب} = \frac{اص}{ص ج}$   
ويكون:  $\frac{١٦}{١٢} = \frac{٢٤}{ص ج}$   $\therefore ص ج = \frac{٢٤ \times ١٢}{١٦} = ١٨$  سم.

ب  $\therefore س ص // ب ج$   $\therefore \frac{اب}{ب س} = \frac{ا ج}{ج ص}$   
ويكون:  $\frac{١٦}{١٢} = \frac{ا ج}{٢١}$   $\therefore ا ج = \frac{٢١ \times ١٦}{١٢} = ٤٩$  سم.

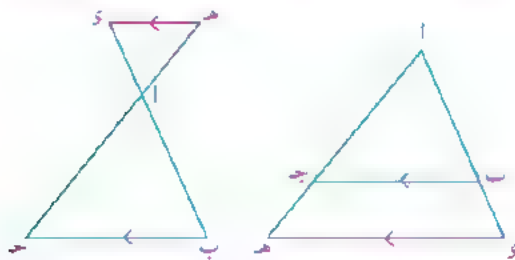
حاول أن تحل

١) في كل من الأشكال التالية:  $و هـ // ب ج$ . أوجد قيمة  $س$  العددية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)



نتيجة

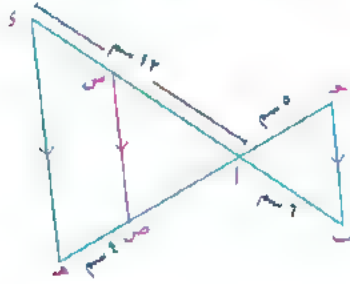
إذا رسم مستقيم خارج مثلث  $ا ب ج$  يوازي ضلعاً من أضلاع المثلث، وليكن  $ب ج$ ، ويقطع  $ا ب$ ،  $ا ج$  في  $ي$ ،  $هـ$  على الترتيب فإن:  $\frac{اي}{ب ي} = \frac{اه}{هـ ج}$  (كما في الشكل).



بتطبيق خواص التناسب نستنتج أن:

$\frac{اي}{ب ي} = \frac{اه}{هـ ج}$  ،  $\frac{اي}{ا ج} = \frac{اه}{ا ب}$

### مثال



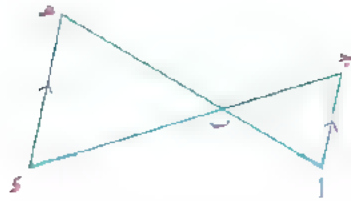
٢ في الشكل المقابل: جـ هـ د  $\cap$  بـ عـ = اـ عـ، سـ  $\ni$  اـ عـ  
 صـ  $\ni$  اـ هـ حيث سـ صـ // بـ جـ // هـ دـ.  
 فإذا كان ا ب = ٦ سم، ا جـ = ٥ سم، ا عـ = ١٢ سم، هـ صـ = ٤ سم.  
 أوجد طول كل من ا هـ، عـ دـ.

الحل

$$\begin{aligned} & \because \overline{هـ د} // \overline{ب ج} \quad , \quad \overline{جـ هـ د} \cap \overline{بـ عـ} = \overline{ا} \\ & \therefore \frac{ا ب}{ا ج} = \frac{ا هـ}{ا د} \quad \text{ويكون: } \frac{١٢}{٥} = \frac{١٢}{ا} \quad \therefore ا هـ = ١٠ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{في } \triangle ا هـ د \\ & \because \overline{سـ ص} // \overline{هـ د} \quad \therefore \frac{ا هـ}{هـ ص} = \frac{ا د}{د س} \\ & \text{ويكون: } \frac{١٢}{٤} = \frac{ا د}{د س} \quad \therefore د س = ٨, ا د = ٤٨ \end{aligned}$$

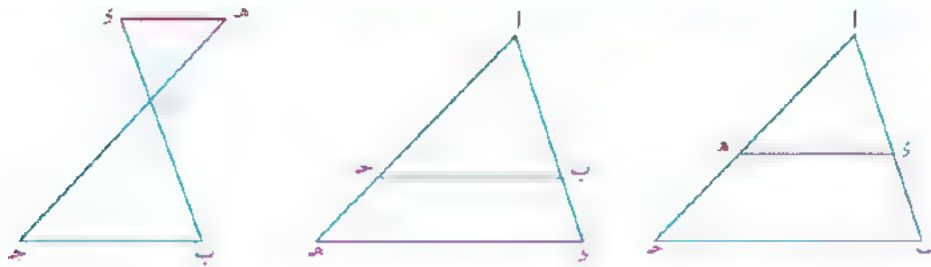
### حاول أن تحل



٢ في الشكل المقابل: عـ دـ // ا جـ، ا هـ د  $\cap$  جـ دـ = بـ  
 أ إذا كان: ا ب = ٨ سم، ب جـ = ٩ سم، ب هـ = ١٢ سم.  
 أوجد طول بـ دـ.  
 ب إذا كان: ا ب = ٦ سم، ب هـ = ٩ سم، جـ دـ = ١٨ سم.  
 أوجد طول بـ جـ.

### عكس نظرية

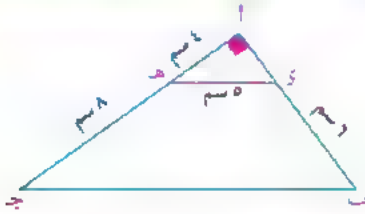
إذا قطع مستقيم ضلعين من أضلاع مثلث، وقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة فإنه يوازي الضلع الثالث.



في الأشكال الثلاثة السابقة: ا ب جـ مثلث، عـ دـ يقطع ا بـ في عـ، ا جـ في دـ. وكان  $\frac{ا عـ}{ا دـ} = \frac{ب عـ}{ب دـ}$   
 فإن عـ دـ // ا بـ جـ

تعمير منطقي: هل  $\triangle ا هـ د \sim \triangle ا ب جـ$  ولماذا؟ - هل  $\triangle ا هـ د \equiv \triangle ا ب جـ$ ؟ قسر إجابتك.  
 اكتب برهاناً لعكس النظرية.

مثال



٣ في الشكل المقابل: أ ب ج مثلث قائم الزاوية في أ  
أ أثبت أن:  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$  ب أوجد طول ب ج.

الدل

أ: المثلث أ ب ج قائم الزاوية في أ

(نظرية فيثاغورث)

$$\therefore \text{أ} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41} = 6.4 \text{ سم}$$

$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{DE}{AB} \quad \therefore \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{DE}{AB}$$

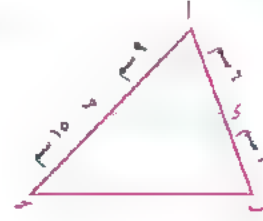
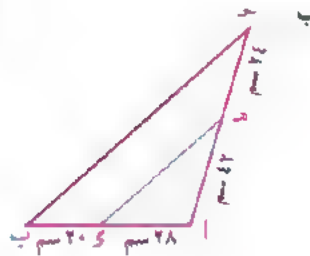
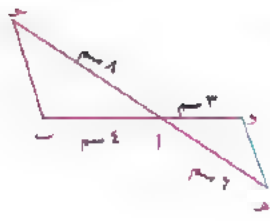
$$\therefore \frac{DE}{AB} = \frac{1}{3} \text{ ويكون } \overline{DE} \parallel \overline{BC}$$

$$\text{ب} \quad \therefore \triangle \text{أ ب ج} \sim \triangle \text{أ د ه} \quad (\text{لماذا}) \quad \therefore \frac{1}{3} = \frac{DE}{AB} = \frac{5}{AB}$$

$$\text{ويكون } \frac{1}{3} = \frac{5}{AB} \quad \therefore \text{ب ج} = 10 \text{ سم}$$

حاول أن تحل

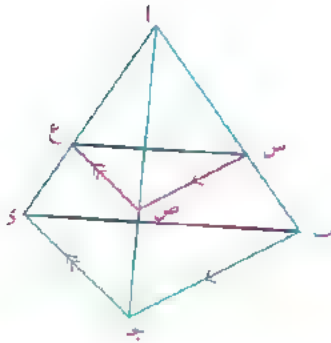
٢ في كل من الأشكال التالية حدد ما إذا كان  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$  أم لا.



مثال

٤ أ ب ج د شكل رباعي فيه  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ،  $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$  حيث  $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ ،  
رسم  $\overline{AD}$  و  $\overline{BC}$  ويقطع  $\overline{AD}$  في ع. أثبت أن  $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ .

الدل



في  $\triangle \text{أ ب ج}$ :

$$(1) \quad \therefore \frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED} \quad \therefore \overline{AC} \parallel \overline{BD}$$

في  $\triangle \text{أ د ج}$ :

$$(2) \quad \therefore \frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED} \quad \therefore \overline{AC} \parallel \overline{BD}$$

$$\text{من (1)، (2) نستنتج أن: } \frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED} = \frac{BE}{ED}$$

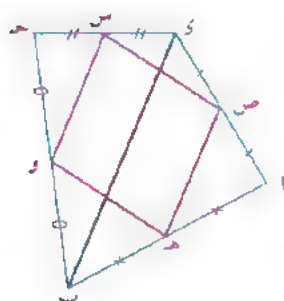
في  $\triangle \text{أ ب د}$ :

$$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED} \quad \therefore \overline{AC} \parallel \overline{BD}$$



حاول أن تحل

(٤) ا ب ج د شكل رباعي تقاطع قطراه في م. رسم م ه // ا د ويقطع ا ب في ه. رسم م و // ج د ويقطع ب ج في و. أثبت أن: ه و // ا ج

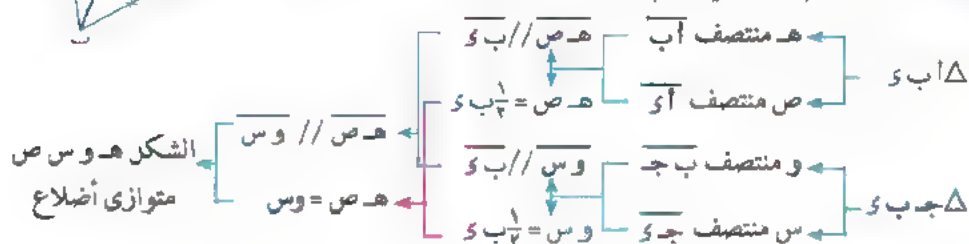


**يفكر منطقي:** إذا كان ه و، س، ص منتصفات الأضلاع ا ب، ب ج، ج د، د ا في الشكل الرباعي ا ب ج د.

هل الشكل ه و س ص متوازي أضلاع؟

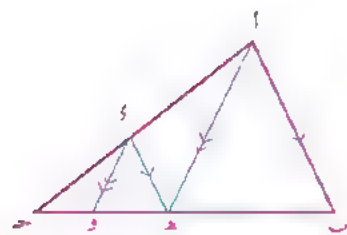
**المهم:** ما المطلوب؟ متى يكون الشكل متوازي أضلاع؟

**خط:** كون مثلثات برسم ب و التي تقسم الشكل إلى مثلثين.



**حل:** اكتب العبارات الرياضية المناسبة للبرهان ومبرراتها.

**تحقق:** ابحث هل ه و // س ص؟ فسر إجابتك.



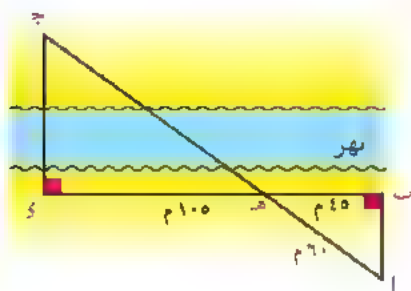
حاول أن تحل

(٥) في الشكل المقابل: ا ب ج د مثلث، د ع // ا ج،

د ه // ا ب، د و // ا ه

ارسم مخططاً يوضح كيفية إثبات أن (ج د ه) = ج د و × ج د ب.

مثال



(٥) **تحديد المواقف:** لتحديد الموقع ج، قام المساحون بالقياس

و إعداد المخطط المقابل.

أوجد بُعد الموقع ج عن الموقع أ

**الحل**

ا ب د ب د، ج د د ب د، ا ب د ب د، ا ب د ب د

ا ب د ب د، ا ب د ب د، ا ب د ب د

ا ب د ب د، ا ب د ب د، ا ب د ب د

ا ب د ب د، ا ب د ب د، ا ب د ب د



**حاول أن تفعل**

مکرم و سفارش

A photograph of a large, ornate, dark-colored metal safe or cabinet. It features multiple compartments, including two large doors at the bottom and several smaller drawers or compartments above. The safe has decorative moldings and a sturdy, heavy-duty appearance.

مَدَّحَه

لبحث وجود علاقة أم لا. نمذج المشكلة (ضع نموذجًا رياضيًا للمشكلة) كما يلي:

**٢- قس أطوال القطع المستقيمة وقارن النسب التالية:**

$$, \frac{ا ب}{ا ح} , \frac{ب ج}{ج د} , \frac{ج د}{د ه}$$

ماذا نستنتج؟

## نظرية تاليس العامة

## Talis' Theorem

نظرية  
إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية، فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.

بالمثل: هو = ب' ج' ، ب س = ب' ج' ، س ص = ج' د' /

في  $\Delta$  ج د و:

$$\therefore \overline{ب ه} // \overline{ج د} \therefore \frac{ب ه}{ج د} = \frac{ب ج}{ج د} = \frac{ب ج}{ج د}$$

ويكون:  $\frac{ب ج}{ج د} = \frac{ب ج}{ج د}$  ،  $\frac{ب ج}{ج د} = \frac{ب ج}{ج د}$  (إبدال الوسطين) (١)

بالمثل  $\Delta$  ب د و:

(٢) (إبدال الوسطين)  $\frac{ب ج}{ج د} = \frac{ب ج}{ج د}$  ،  $\frac{ب ج}{ج د} = \frac{ب ج}{ج د}$

من (١)، (٢) ينتج أن

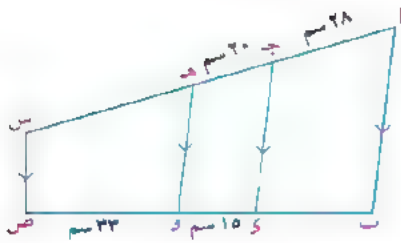
$$\frac{ب ج}{ج د} = \frac{ب ج}{ج د} = \frac{ب ج}{ج د}$$

$\therefore$  أ ب : ب ج : ج د = أ ب' : ب' ج' : ج' د' وهو المطلوب.

حاول أن تحل

٧ اكتب ما تساويه كل من النسب التالية مستخدماً الشكل السابق:

أ  $\frac{أ ج}{ج د}$  ، ب  $\frac{أ ج}{ج د}$  ، ج  $\frac{ب د}{د أ}$  ، د  $\frac{ب د}{د أ}$  ، هـ  $\frac{أ ب}{ب د}$  ، هـ  $\frac{أ ب}{ب د}$



٦ في الشكل المقابل:  $\overline{أ ب} // \overline{ج د} // \overline{هـ و} // \overline{س ص}$  ،

أ ج = ٢٨ سم، ج د = ٢٠ سم، د و = ١٥ سم، و ص = ٣٣ سم.

أوجد طول كل من: ب د ، هـ س

الحل

$$\therefore \overline{أ ب} // \overline{ج د} // \overline{هـ و} // \overline{س ص}$$

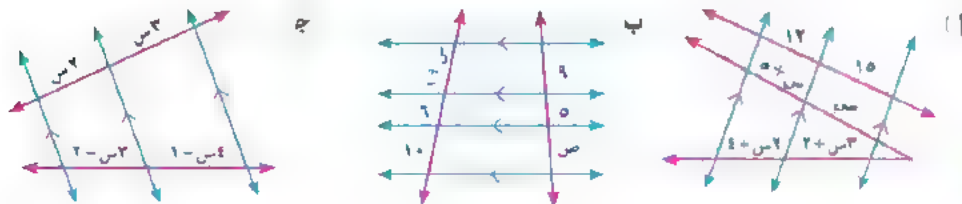
$$\therefore \frac{أ ج}{ج د} = \frac{ج د}{د و} = \frac{هـ و}{و ص}$$

$$\therefore \frac{أ ج}{ج د} = \frac{ج د}{د و} = \frac{هـ و}{و ص} \therefore \frac{٢٨}{٢٠} = \frac{٢٠}{١٥} = \frac{هـ س}{٣٣} \therefore هـ س = ٤٤ سم.$$

حاول أن تحل

٨ في كل من الأشكال التالية، المستقيمات الحمراء تقطع مستقيمات متوازية. احسب قيم س، ص العددية

(الأطوال مقدرة بالستيمترات)



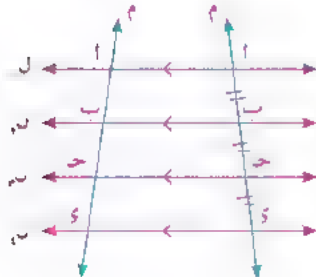
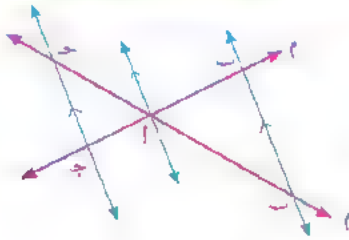
## حالات خاصة

١- إذا تقاطع المستقيمان م، م' في النقطة أ

وكان:  $\vec{b} \vec{b} // \vec{c} \vec{c}$ ، فإن:  $\frac{\vec{a} \vec{b}}{\vec{a} \vec{c}} = \frac{\vec{b} \vec{b}}{\vec{c} \vec{c}}$

وبالعكس: إذا كان:  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

ہاں: ب ب // ج ج



### نظريّة قائييس الخاصة

**٢- إذا كانت أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين متساوية فإن**

أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر تكون متساوية كذلك.

في الشكل المقابل، ل، ل // ل، ل // ل، ل، قطعها المستقيمان م، م'

وکان: اب = ب ج = ج ی فان: ا' ب' = ب' ج' = ج' ی'

**مثال**

٧ في الشكل المقابل أوجد القيمة العددية لكل من س، ص.

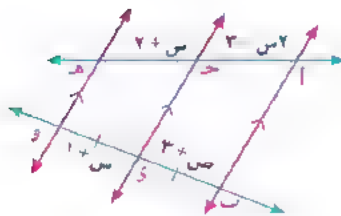
### الحل

اب // جد // هو، بی = یو

۱. اجز = جھ

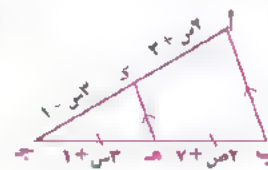
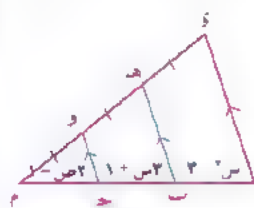
ویکون: ۲س - ۳س - ۲س. ۵

∴ ب = ۵ و س = ۵      ∴ ص = ۳ + ۵ = ۸      ∴ ص = ۳



**حاول أن تحل**

٩ في كل مما يأتي أوجد قيمة س، ص العددية. (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)



## مکمل

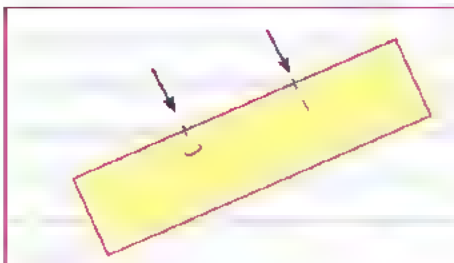
أراد يوسف تقسيم شريط من الورق إلى ٣ أجزاء متساوية

فی الطول، فقام بوضعها علی صفحہ کراستہ کما بالشکل

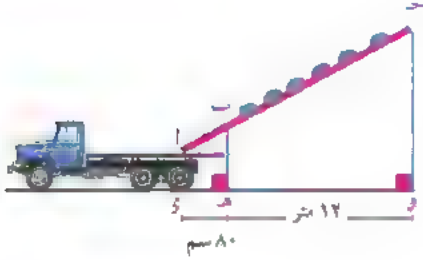
المقابل وحدد نقطتي التقسيم أ، ب.

هل تقسيم يوسف للشريط صحيحًا؟ فسر إجابتك.

استخدم أدواتك الهندسية لتحقيق من صحة إجابتك



### مثال



٨) **الربط بالصناعة:** تنقل عبوات الأسمدة من إنتاج أحد المصانع بانزلاقها عبر أنبوب مائل لتحملها السيارات إلى مراكز التوزيع كما في الشكل المقابل.  
فإذا كانت  $د$ ،  $هـ$ ، و مساقط النقط  $ا$ ،  $ب$ ،  $ج$  على الأفقي بنفس الترتيب،  $ا ب = ١٢$  م،  $د هـ = ٨٠$  سم،  $هـ و = ١٢$  مترًا أوجد طول الأنبوب لأقرب متر.

### الحل

$$\therefore \overline{ا د} // \overline{ب هـ} // \overline{ج و}$$

$$\therefore \frac{ا ب}{ج و} = \frac{د هـ}{هـ و}$$

$$\therefore ا ب \approx ١٩ \text{ مترًا}$$

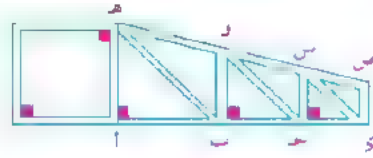
$$\therefore \overline{ا د} // \overline{ب هـ} // \overline{ج و} \quad ، \quad \overline{ا ج} \quad ، \quad \overline{د و} \quad \text{قاطعان لها}$$

$$\text{ويكون: } \frac{ا ب}{ج و} = \frac{د هـ}{هـ و}$$

$$\therefore ا ب = \frac{١٢ \times ٨٠}{١٢} = ٨٠ \text{ سم} = ٠,٨ \text{ مترًا}$$

### حاول أن تحل

### ١٠) ١ الربط بالإنشاءات:

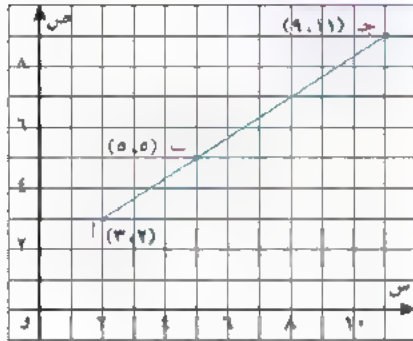


إذا كان  $ا ب = ١٨٠$  سم،  $هـ و = ٢$  متر

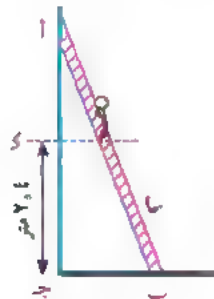
$$ا ب : ب ج : ج د = ٣ : ٤ : ٥$$

أوجد طول كل من  $هـ ص$ ،  $ج د$

### ب تكبير نافذ



أوجد من الشكل  $\frac{ا ب}{ب ج}$  بعدة طرق مختلفة، كلما أمكنك ذلك. هل حصلت على نفس الناتج؟

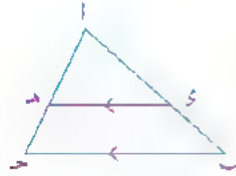


### ٩) ٢ مشكلة في الحياة

**حل مشكلتين:**  $ا ب$  سلم طوله ٤,١ أمتار يستند بطرفه العلوي  $ا$  على حائط رأسى وبطرفه السفلي  $ب$  على أرض أفقية خشنة. إذا كان بعد الطرف السفلي عن الحائط ٩,٠ سم. فاحسب المسافة التي يصعد بها رجل على السلم ليصبح على ارتفاع ٢,٤ متر من الأرض.

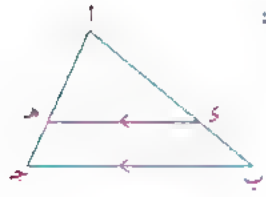
### تمارين ٣ - ١

١) في الشكل المقابل و  $\overline{هـ د} // \overline{ب ج}$  أكمل:



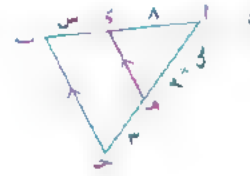
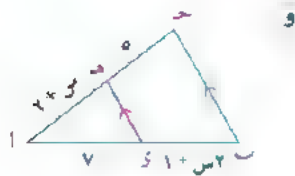
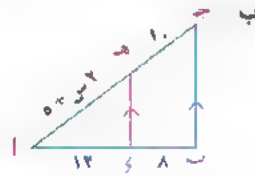
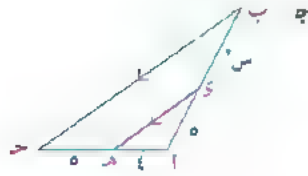
ا إذا كان  $\frac{أ ب}{ب ج} = \frac{٥}{٣}$  فإن  $\frac{أ د}{د ب} = \frac{٥}{٣}$  ،  $\frac{أ هـ}{هـ د} = \frac{٥}{٣}$   
 ب إذا كان  $\frac{أ هـ}{هـ د} = \frac{٤}{٧}$  فإن  $\frac{أ ج}{ج د} = \frac{٤}{٧}$  ،  $\frac{أ ب}{ب ج} = \frac{٤}{٧}$

٢) في الشكل المقابل و  $\overline{ب ج} // \overline{هـ د}$  حدد العبارات الصحيحة من ما يلي:

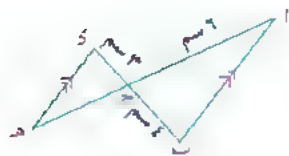


ا  $\frac{أ ب}{ب ج} = \frac{أ هـ}{هـ د}$       ب  $\frac{أ ب}{ب ج} = \frac{أ د}{د ب}$   
 ج  $\frac{أ ب}{ب ج} = \frac{أ ج}{ج د}$       د  $\frac{أ ب}{ب ج} = \frac{أ هـ}{هـ د}$   
 هـ  $\frac{أ ب}{ب ج} = \frac{أ د}{د ب}$       و  $\frac{أ ج}{ج د} = \frac{أ هـ}{هـ د}$

٣) في كل من الأشكال التالية و  $\overline{ب ج} // \overline{هـ د}$  أوجد قيمة س العددية (الأطوال بالسنتيمترات).



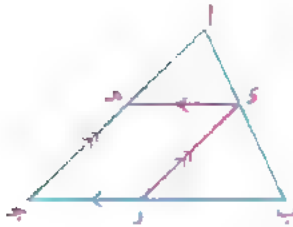
٤) في الشكل المقابل:  $\overline{أ ب} // \overline{و هـ}$  ،  $\overline{أ هـ} \cap \overline{ب و} = (ج)$



أ ج = ٦سم ، ب ج = ٤سم ، ج د = ٣سم  
 أوجد طول ج هـ

٥)  $\overline{س} \overline{ص} \cap \overline{ع} \overline{ل} = \{م\}$ ، حيث  $\overline{س} \overline{ع} // \overline{ل} \overline{ص}$ ، فإذا كان  $س م = ٩$  سم،  $ص م = ١٥$  سم،  $ع ل = ٣٦$  سم. أوجد طول  $\overline{ع م}$ .

٦ لكل مما يأتي: استخدم الشكل المقابل والبيانات المعطاة لإيجاد قيمة س:



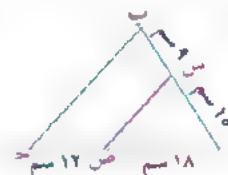
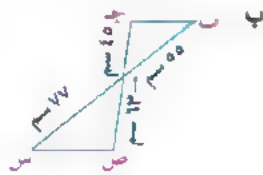
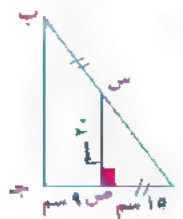
۱ ای = ۴ ، بی = ۸ ، جم = ۶ ، اه = ۳ .

ب ا هـ - س ، هـ ج - ٥ ، اى - س - ٢ ، ي ب - ٣ .

\* أب = ۲۱ ، ب = ۸ ، و = ۶ ، ج = ۷ ، د = ۴ ، هـ = ۵ ، ز = ۳ ، ح = ۱ ، ط = ۲ ، ی = ۱۰ ، ک = ۱۱ ، ل = ۱۲ ، م = ۱۳ ، ن = ۱۴ ، س = ۱۵ ، ع = ۱۶ ، ف = ۱۷ ، ق = ۱۸ ، کاف = ۱۹ ، گ = ۲۰ ، خ = ۲۱ ، دال = ۲۲ ، ذال = ۲۳ ، ر = ۲۴ ، ز = ۲۵ ، ح = ۲۶ ، ط = ۲۷ ، ی = ۲۸ ، ک = ۲۹ ، ل = ۳۰ ، م = ۳۱ ، ن = ۳۲ ، س = ۳۳ ، ع = ۳۴ ، ف = ۳۵ ، ق = ۳۶ ، کاف = ۳۷ ، گ = ۳۸ ، خ = ۳۹ ، دال = ۴۰ ، ذال = ۴۱ ، ر = ۴۲ ، ز = ۴۳ ، ح = ۴۴ ، ط = ۴۵ ، ی = ۴۶ ، ک = ۴۷ ، ل = ۴۸ ، م = ۴۹ ، ن = ۵۰ ، س = ۵۱ ، ع = ۵۲ ، ف = ۵۳ ، ق = ۵۴ ، کاف = ۵۵ ، گ = ۵۶ ، خ = ۵۷ ، دال = ۵۸ ، ذال = ۵۹ ، ر = ۶۰ ، ز = ۶۱ ، ح = ۶۲ ، ط = ۶۳ ، ی = ۶۴ ، ک = ۶۵ ، ل = ۶۶ ، م = ۶۷ ، ن = ۶۸ ، س = ۶۹ ، ع = ۷۰ ، ف = ۷۱ ، ق = ۷۲ ، کاف = ۷۳ ، گ = ۷۴ ، خ = ۷۵ ، دال = ۷۶ ، ذال = ۷۷ ، ر = ۷۸ ، ز = ۷۹ ، ح = ۸۰ ، ط = ۸۱ ، ی = ۸۲ ، ک = ۸۳ ، ل = ۸۴ ، م = ۸۵ ، ن = ۸۶ ، س = ۸۷ ، ع = ۸۸ ، ف = ۸۹ ، ق = ۹۰ ، کاف = ۹۱ ، گ = ۹۲ ، خ = ۹۳ ، دال = ۹۴ ، ذال = ۹۵ ، ر = ۹۶ ، ز = ۹۷ ، ح = ۹۸ ، ط = ۹۹ ، ی = ۱۰۰ ، ک = ۱۰۱ ، ل = ۱۰۲ ، م = ۱۰۳ ، ن = ۱۰۴ ، س = ۱۰۵ ، ع = ۱۰۶ ، ف = ۱۰۷ ، ق = ۱۰۸ ، کاف = ۱۰۹ ، گ = ۱۱۰ ، خ = ۱۱۱ ، دال = ۱۱۲ ، ذال = ۱۱۳ ، ر = ۱۱۴ ، ز = ۱۱۵ ، ح = ۱۱۶ ، ط = ۱۱۷ ، ی = ۱۱۸ ، ک = ۱۱۹ ، ل = ۱۲۰ ، م = ۱۲۱ ، ن = ۱۲۲ ، س = ۱۲۳ ، ع = ۱۲۴ ، ف = ۱۲۵ ، ق = ۱۲۶ ، کاف = ۱۲۷ ، گ = ۱۲۸ ، خ = ۱۲۹ ، دال = ۱۳۰ ، ذال = ۱۳۱ ، ر = ۱۳۲ ، ز = ۱۳۳ ، ح = ۱۳۴ ، ط = ۱۳۵ ، ی = ۱۳۶ ، ک = ۱۳۷ ، ل = ۱۳۸ ، م = ۱۳۹ ، ن = ۱۴۰ ، س = ۱۴۱ ، ع = ۱۴۲ ، ف = ۱۴۳ ، ق = ۱۴۴ ، کاف = ۱۴۵ ، گ = ۱۴۶ ، خ = ۱۴۷ ، دال = ۱۴۸ ، ذال = ۱۴۹ ، ر = ۱۵۰ ، ز = ۱۵۱ ، ح = ۱۵۲ ، ط = ۱۵۳ ، ی = ۱۵۴ ، ک = ۱۵۵ ، ل = ۱۵۶ ، م = ۱۵۷ ، ن = ۱۵۸ ، س = ۱۵۹ ، ع = ۱۶۰ ، ف = ۱۶۱ ، ق = ۱۶۲ ، کاف = ۱۶۳ ، گ = ۱۶۴ ، خ = ۱۶۵ ، دال = ۱۶۶ ، ذال = ۱۶۷ ، ر = ۱۶۸ ، ز = ۱۶۹ ، ح = ۱۷۰ ، ط = ۱۷۱ ، ی = ۱۷۲ ، ک = ۱۷۳ ، ل = ۱۷۴ ، م = ۱۷۵ ، ن = ۱۷۶ ، س = ۱۷۷ ، ع = ۱۷۸ ، ف = ۱۷۹ ، ق = ۱۸۰ ، کاف = ۱۸۱ ، گ = ۱۸۲ ، خ = ۱۸۳ ، دال = ۱۸۴ ، ذال = ۱۸۵ ، ر = ۱۸۶ ، ز = ۱۸۷ ، ح = ۱۸۸ ، ط = ۱۸۹ ، ی = ۱۹۰ ، ک = ۱۹۱ ، ل = ۱۹۲ ، م = ۱۹۳ ، ن = ۱۹۴ ، س = ۱۹۵ ، ع = ۱۹۶ ، ف = ۱۹۷ ، ق = ۱۹۸ ، کاف = ۱۹۹ ، گ = ۲۰۰ ، خ = ۲۰۱ ، دال = ۲۰۲ ، ذال = ۲۰۳ ، ر = ۲۰۴ ، ز = ۲۰۵ ، ح = ۲۰۶ ، ط = ۲۰۷ ، ی = ۲۰۸ ، ک = ۲۰۹ ، ل = ۲۱۰ ، م = ۲۱۱ ، ن = ۲۱۲ ، س = ۲۱۳ ، ع = ۲۱۴ ، ف = ۲۱۵ ، ق = ۲۱۶ ، کاف = ۲۱۷ ، گ = ۲۱۸ ، خ = ۲۱۹ ، دال = ۲۲۰ ، ذال = ۲۲۱ ، ر = ۲۲۲ ، ز = ۲۲۳ ، ح = ۲۲۴ ، ط = ۲۲۵ ، ی = ۲۲۶ ، ک = ۲۲۷ ، ل = ۲۲۸ ، م = ۲۲۹ ، ن = ۲۳۰ ، س = ۲۳۱ ، ع = ۲۳۲ ، ف = ۲۳۳ ، ق = ۲۳۴ ، کاف = ۲۳۵ ، گ = ۲۳۶ ، خ = ۲۳۷ ، دال = ۲۳۸ ، ذال = ۲۳۹ ، ر = ۲۴۰ ، ز = ۲۴۱ ، ح = ۲۴۲ ، ط = ۲۴۳ ، ی = ۲۴۴ ، ک = ۲۴۵ ، ل = ۲۴۶ ، م = ۲۴۷ ، ن = ۲۴۸ ، س = ۲۴۹ ، ع = ۲۵۰ ، ف = ۲۵۱ ، ق = ۲۵۲ ، کاف = ۲۵۳ ، گ = ۲۵۴ ، خ = ۲۵۵ ، دال = ۲۵۶ ، ذال = ۲۵۷ ، ر = ۲۵۸ ، ز = ۲۵۹ ، ح = ۲۶۰ ، ط = ۲۶۱ ، ی = ۲۶۲ ، ک = ۲۶۳ ، ل = ۲۶۴ ، م = ۲۶۵ ، ن = ۲۶۶ ، س = ۲۶۷ ، ع = ۲۶۸ ، ف = ۲۶۹ ، ق = ۲۷۰ ، کاف = ۲۷۱ ، گ = ۲۷۲ ، خ = ۲۷۳ ، دال = ۲۷۴ ، ذال = ۲۷۵ ، ر = ۲۷۶ ، ز = ۲۷۷ ، ح = ۲۷۸ ، ط = ۲۷۹ ، ی = ۲۸۰ ، ک = ۲۸۱ ، ل = ۲۸۲ ، م = ۲۸۳ ، ن = ۲۸۴ ، س = ۲۸۵ ، ع = ۲۸۶ ، ف = ۲۸۷ ، ق = ۲۸۸ ، کاف = ۲۸۹ ، گ = ۲۹۰ ، خ = ۲۹۱ ، دال = ۲۹۲ ، ذال = ۲۹۳ ، ر = ۲۹۴ ، ز = ۲۹۵ ، ح = ۲۹۶ ، ط = ۲۹۷ ، ی = ۲۹۸ ، ک = ۲۹۹ ، ل = ۳۰۰ ، م = ۳۰۱ ، ن = ۳۰۲ ، س = ۳۰۳ ، ع = ۳۰۴ ، ف = ۳۰۵ ، ق = ۳۰۶ ، کاف = ۳۰۷ ، گ = ۳۰۸ ، خ = ۳۰۹ ، دال = ۳۱۰ ، ذال = ۳۱۱ ، ر = ۳۱۲ ، ز = ۳۱۳ ، ح = ۳۱۴ ، ط = ۳۱۵ ، ی = ۳۱۶ ، ک = ۳۱۷ ، ل = ۳۱۸ ، م = ۳۱۹ ، ن = ۳۲۰ ، س = ۳۲۱ ، ع = ۳۲۲ ، ف = ۳۲۳ ، ق = ۳۲۴ ، کاف = ۳۲۵ ، گ = ۳۲۶ ، خ = ۳۲۷ ، دال = ۳۲۸ ، ذال = ۳۲۹ ، ر = ۳۳۰ ، ز = ۳۳۱ ، ح = ۳۳۲ ، ط = ۳۳۳ ، ی = ۳۳۴ ، ک = ۳۳۵ ، ل = ۳۳۶ ، م = ۳۳۷ ، ن = ۳۳۸ ، س = ۳۳۹ ، ع = ۳۴۰ ، ف = ۳۴۱ ، ق = ۳۴۲ ، کاف = ۳۴۳ ، گ = ۳۴۴ ، خ = ۳۴۵ ، دال = ۳۴۶ ، ذال = ۳۴۷ ، ر = ۳۴۸ ، ز = ۳۴۹ ، ح = ۳۵۰ ، ط = ۳۵۱ ، ی = ۳۵۲ ، ک = ۳۵۳ ، ل = ۳۵۴ ، م = ۳۵۵ ، ن = ۳۵۶ ، س = ۳۵۷ ، ع = ۳۵۸ ، ف = ۳۵۹ ، ق = ۳۶۰ ، کاف = ۳۶۱ ، گ = ۳۶۲ ، خ = ۳۶۳ ، دال = ۳۶۴ ، ذال = ۳۶۵ ، ر = ۳۶۶ ، ز = ۳۶۷ ، ح = ۳۶۸ ، ط = ۳۶۹ ، ی = ۳۷۰ ، ک = ۳۷۱ ، ل = ۳۷۲ ، م = ۳۷۳ ، ن = ۳۷۴ ، س = ۳۷۵ ، ع = ۳۷۶ ، ف = ۳۷۷ ، ق = ۳۷۸ ، کاف = ۳۷۹ ، گ = ۳۸۰ ، خ = ۳۸۱ ، دال = ۳۸۲ ، ذال = ۳۸۳ ، ر = ۳۸۴ ، ز = ۳۸۵ ، ح = ۳۸۶ ، ط = ۳۸۷ ، ی = ۳۸۸ ، ک = ۳۸۹ ، ل = ۳۹۰ ، م = ۳۹۱ ، ن = ۳۹۲ ، س = ۳۹۳ ، ع = ۳۹۴ ، ف = ۳۹۵ ، ق = ۳۹۶ ، کاف = ۳۹۷ ، گ = ۳۹۸ ، خ = ۳۹۹ ، دال = ۴۰۰ ، ذال = ۴۰۱ ، ر = ۴۰۲ ، ز = ۴۰۳ ، ح = ۴۰۴ ، ط = ۴۰۵ ، ی = ۴۰۶ ، ک = ۴۰۷ ، ل = ۴۰۸ ، م = ۴۰۹ ، ن = ۴۱۰ ، س = ۴۱۱ ، ع = ۴۱۲ ، ف = ۴۱۳ ، ق = ۴۱۴ ، کاف = ۴۱۵ ، گ = ۴۱۶ ، خ = ۴۱۷ ، دال = ۴۱۸ ، ذال = ۴۱۹ ، ر = ۴۲۰ ، ز = ۴۲۱ ، ح = ۴۲۲ ، ط = ۴۲۳ ، ی = ۴۲

د اۛ = س ، ب و = س + ۛ ، ۛ ب = ۛ و ج = ۛۛ .

❖ في كل من الأشكال التالية، حدد ما إذا كان  $s$  ص // ب جـ



۵) س ص ع مثلث فیہ س ص = ۱۴سم، س ع = ۲۱سم، ل  $\exists$  س ص بحیث س ل = ۶، ۵سم،

$m \ni s \in \overline{s} \text{ حيث } m = 8, 4 \text{ سم. أثبت أن } \overline{m} // \overline{s}$

٩ في المثلث ا ب ج،  $\angle \text{آ} = 40^\circ$ ،  $\angle \text{ب} = 60^\circ$ ،  $\angle \text{ج} = 80^\circ$ ، اوجد  $\angle \text{د}$  في المثلث ا ب د.

إذا كان  $a = 10$  سم، و  $b = 8$  سم. حدد ما إذا كان  $\overline{OH} // \overline{AB}$  جـ، فسر إجابتك.

١٠) ا ب ج د شكل رباعي تقاطع قطراه في هـ فإذا كان ا هـ = ٦ سم، ب هـ = ١٣ سم، هـ و = ١٠ سم،

هـ ٧، ٨ = سم. أثبت أن الشكل أب ج د شبه منحرف.

١٩. أثبت أن القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين في مثلث يوازي ضلعه الثالث، وطولها يساوي نصف طول هذا الضلع.

(۱۷) اب ج مثلث، ی ۳ اب حیث ۲ ی ۳ پ، ه ۳ اج حیث ۵ ج ه ۳ اج رسم اس یقطع ب ج

في س. إذا كان  $او = ٨سم$ ،  $اس = ٢٠سم$ ، حيث  $و \in اس$ . أثبت أن النقط  $و$ ،  $و$ ،  $هـ$  على استقامة واحدة.

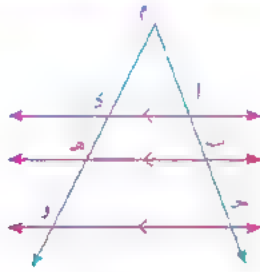
(۱۲) ابجد مثلث؛ د ب ج، بحیث  $\frac{ب}{د} = \frac{۴}{۳}$ ، ه ذ ای، بحیث  $\frac{ه}{د} = \frac{۱۵}{۷}$ ، رسم جده فقطع اب فی س،

رسم ۵ ص // ج س فقطع ا ب في ص. أثبت أن اس = ب ص.

(۱۴) ا ب ج د مستطیل تقاطع قطراه فی م، هـ منتصف ا م، و منتصف م ج، رسم و هـ یقطع ا ب فی س،

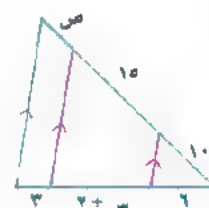
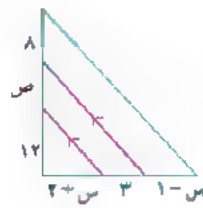
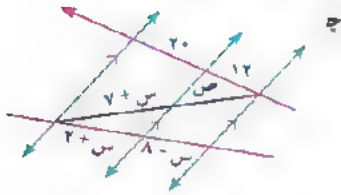
ورسم  $\overline{\text{و}}$  يقطع  $\overline{\text{ب ج}}$  في  $\text{ص}$ . أثبت أن:  $\overline{\text{س ص}} // \overline{\text{أ ج}}$ .

١٥) اكتب ما تساويه كل من النسب التالية مستخدماً الشكل المقابل:

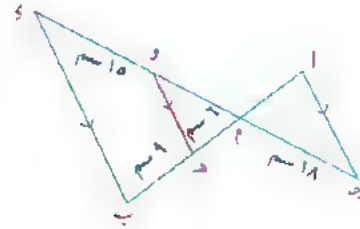


$$\begin{array}{ll} \frac{ا}{ب} = \frac{س}{م} & \text{ب} \quad \frac{ا}{ب} = \frac{ج}{م} \\ \frac{ب}{ج} = \frac{س}{م} & \text{د} \quad \frac{ا}{ب} = \frac{و}{م} \\ \frac{ج}{م} = \frac{س}{م} & \text{و} \quad \frac{ا}{ب} = \frac{و}{م} \\ \frac{ا}{ب} = \frac{س}{م} & \text{ح} \quad \frac{ا}{ب} = \frac{و}{م} \end{array}$$

١٦) في كل من الأشكال التالية، احسب قيم س، ص العددية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)



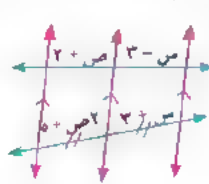
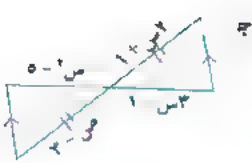
١٧) في الشكل المقابل:



$$\begin{array}{l} \overline{ا} \cap \overline{ج} = \{م\}, \overline{هـ} \ni م, ب \\ \overline{و} \ni م, \overline{ا} \parallel \overline{و}, \overline{ج} \parallel \overline{و} \\ \text{أوجد:} \\ \overline{ا} \text{ طول } م \\ \overline{ب} \text{ طول } م \end{array}$$

١٨)  $\overline{ا} \cap \overline{ج} = \{هـ\}$ ,  $\overline{ا} \ni هـ$ ,  $\overline{ب} \ni هـ$ , وكان  $\overline{س} \parallel \overline{ب} \parallel \overline{و} \parallel \overline{ا}$  أثبت أن:  $اس \times هـ = جص \times هـ$

١٩) في كل من الأشكال التالية، احسب قيم س، ص العددية:



٢٠) ا ب ج د شكل رباعي فيه  $\overline{ا} \parallel \overline{ج}$ , تقاطع قطراه في م، نصف ب ج في هـ، ورسم هـ د  $\parallel$  ب أ، ويقطع ب د في س، ا ج في ص، ا د في و. أثبت أن:  $ا هـ ص = ا ب$  ب  $ا ص = ب م$



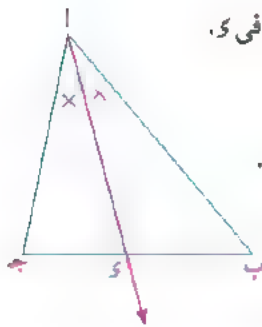
## منصفا الزاوية والأجزاء المتناسبة

### Angle Bisectors and Proportional Parts

٢ - ٣

#### سوف تتعلم

- 4 خصائص منصبات زوايا المثلث.
- 4 استخدام التناسب في حساب أطوال القطع لمستقيمة الناتجة عن تنصيف زاوية في مثلث
- 4 مدحه وحل مشكلات حياته
- 4 تنصص منصبات زوايا المثلث



١- ارسم المثلث  $ABC$ ، وارسم  $AD$  ليقطع  $BC$  في  $D$ .

٢- قس كلًا من  $BD$ ،  $DC$ ،  $AB$ ،  $AC$ .

٣- احسب كل من النسبتين  $\frac{BD}{DC}$ ،  $\frac{AB}{AC}$  وقارن بينهما. ماذا تستنتج؟

٤- كرر العمل السابق عدة مرات.

هل يتحقق استنتاجك؟ عبر عن استنتاجك بلغتك.

#### Bisector of an Angle of a Triangle

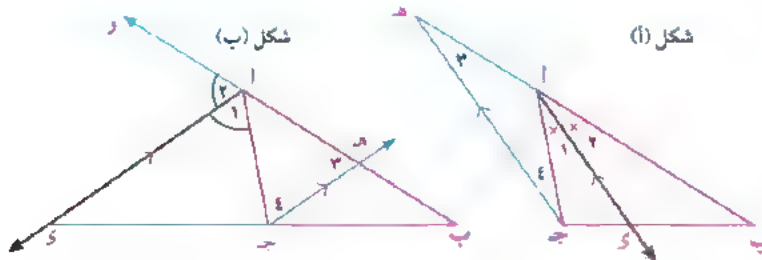
#### منصف زاوية مثلث

إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس، وقسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو الخارج إلى جزأين فإن النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولى الضلعين الآخرين

نظرية

#### المصطلحات الأساسية

- 4 منصف Bisector
- 4 منصف داخلي Interior Bisector
- 4 منصف خارجي Exterior Bisector
- 4 عمودي Perpendicular



المعطيات:  $AD$  ينصف  $\angle BAC$

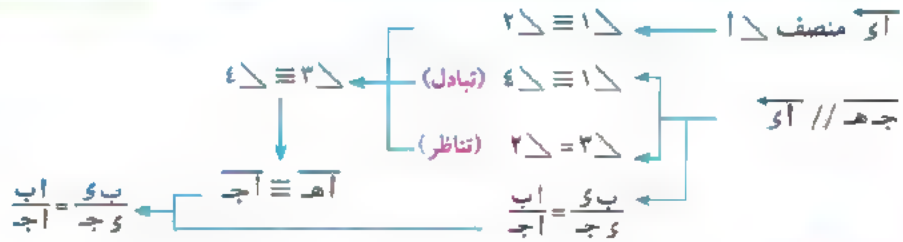
(من الداخل في شكل أ، من الخارج في شكل ب).

المطلوب:  $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

البرهان: ارسم  $DE \parallel AD$  ويقطع  $BC$  في  $E$ . اتبع المخطط التالي واكتب البرهان.

#### الأدوات والوسائل

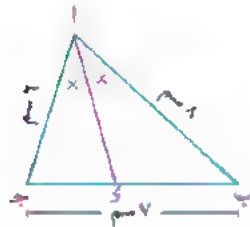
- 4 أدوات هندسية للرسم.
- 4 حاسب آلي وبرامج رسومية.
- 4 جهاز عرض بيانات.



### مثال

- ①  $\Delta$   $أ ب ج$  مثلث فيه  $أ ب = ٨$  سم،  $أ ج = ٦$  سم،  $ب ج = ٧$  سم، رسم  $\overline{أ ي}$  ينصف  $\Delta$   $أ ب ج$  ويقطع  $\overline{ب ج}$  في  $ي$ . أوجد طول كل من  $ب ي$ ،  $ي ج$ .

### الحل



∴  $\overline{أ ي}$  ينصف  $\Delta$   $أ ب ج$  ∴  $\frac{أ ب}{أ ج} = \frac{ب ي}{ي ج}$  (نظرية)

∴  $\frac{٨}{٦} = \frac{ب ي}{ي ج}$  ∴  $٨ ي ج = ٦ ب ي$

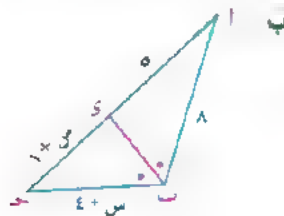
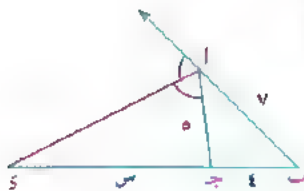
∴  $٨ ي ج = ٦ (٧ - ي ج)$  ∴  $٨ ي ج = ٤٢ - ٦ ي ج$

∴  $١٤ ي ج = ٤٢$  ∴  $ي ج = ٣$  سم

∴  $ب ي = ٧ - ٣ = ٤$  سم

### حاول أن تحل

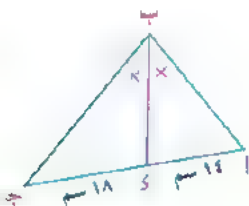
- ① في كل من الأشكال التالية أوجد قيمة  $س$  العددية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)



### مثال

- ②  $\Delta$   $أ ب ج$  مثلث. رسم  $\overline{ب ي}$  ينصف  $\Delta$   $أ ب ج$ ، ويقطع  $\overline{أ ج}$  في  $ي$ ، حيث  $أ ي = ١٤$  سم،  $ي ج = ١٨$  سم. إذا كان محيط  $\Delta$   $أ ب ج = ٨٠$  سم، فأوجد طول كل من:  $\overline{ب ج}$ ،  $\overline{أ ب}$ .

### الحل



في  $\Delta$   $أ ب ج$

∴  $\overline{ب ي}$  ينصف  $\Delta$   $أ ب ج$  ∴  $\frac{أ ب}{أ ج} = \frac{ب ي}{ي ج}$

∴  $\frac{١٤}{١٨} = \frac{ب ي}{ي ج}$

∴  $١٤ ي ج = ١٨ ب ي$

∴  $١٤ ي ج = ١٨ (١٨ - ي ج)$  ∴  $١٤ ي ج = ٣٢٤ - ١٨ ي ج$

∴  $٣٢ ي ج = ٣٢٤$  ∴  $ي ج = ٩$  سم

∴  $أ ج = ١٨ + ٩ = ٢٧$  سم

∴  $أ ب + ب ج = ٨٠ - ٢٧ = ٥٣$  سم

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{7}{9} \quad \therefore \frac{AB+BC}{BC} = \frac{9+7}{9} \quad (\text{خواص التناسب})$$

$$\text{ويكون } \frac{16}{9} = \frac{48}{BC} \quad \therefore BC = 27 \text{ سم} \quad , \quad AB = 21 \text{ سم}$$

حاول أن تحل

٢)  $\triangle ABC$  مثلث قائم الزاوية في  $B$ ، رسم  $\overline{AI}$  ينصف  $\angle A$ ، ويقطع  $\overline{BC}$  في  $I$ .  
إذا كان طول  $\overline{BI} = 24$  سم،  $BA : AI = 3 : 5$  فأوجد محيط  $\triangle ABC$ .

ملاحظة هامة

١- في المثلث  $\triangle ABC$  حيث  $AB \neq AC$ :

إذا كان  $\overline{AI}$  ينصف  $\angle A$ ،

$\overline{AI}$  ينصف الزاوية الخارجة للمثلث عند  $A$ .

$$\text{فإن: } \frac{BI}{IC} = \frac{AB}{AC}, \quad \frac{BI}{IC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{ويكون } \frac{BI}{IC} = \frac{AB}{AC}$$

أي أن  $\overline{BI}$  تنقسم من الداخل في  $I$  ومن الخارج في  $H$  بنسبة واحدة

ويكون المنصفين  $\overline{AI}$ ،  $\overline{AH}$  متعامدين. (لماذا؟)

٢- إذا كان  $AB < AC$ ، قطع منصف  $\angle A$  الضلع  $\overline{BC}$  في  $I$  حيث  $BI < IC$ ، أما منصف الزاوية الخارجة عند  $A$  فيقطع  $\overline{BC}$  في  $H$  حيث  $BI < HC$ .

تمثيل باني

كلما كبر  $AC$  ماذا يحدث للنقطة  $I$ ؟

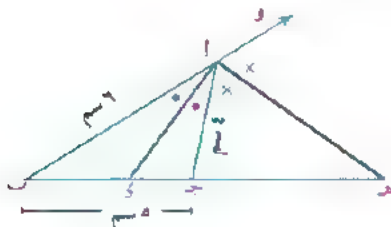
كلما كان  $AB = AC$  أين تقع النقطة  $I$ ؟ وما وضع  $\overline{AH}$  بالنسبة إلى  $\overline{BC}$  عندئذ؟

كلما يصبح  $AB < AC$  ما العلاقة بين  $I$  و  $H$ ؟ وأين تقع  $H$  عندئذ؟ قارن إجابتك مع زملائك.

مثال

٢)  $\triangle ABC$  مثلث فيه  $AB = 6$  سم،  $AC = 4$  سم،  $BC = 5$  سم. رسم  $\overline{AI}$  ينصف  $\angle A$  ويقطع  $\overline{BC}$  في  $I$ ، ورسم  $\overline{AH}$  ينصف  $\angle A$  الخارجة ويقطع  $\overline{BC}$  في  $H$ . احسب طول  $\overline{IH}$ .

الحل



$\therefore \overline{AI}$  ينصف  $\angle A$ ،  $\overline{AH}$  ينصف  $\angle A$  الخارجة

$\therefore I$  و  $H$  تقسمان  $\overline{BC}$  من الداخل ومن الخارج بنفس النسبة.

$$\text{أي أن: } \frac{BI}{IC} = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{4}$$

$$\therefore \frac{BI}{IC} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore BI = 3 \text{ و } IC = 2, \quad BH = 6 \text{ و } HC = 4$$

من خواص التناسب نجد

$$\frac{ب ي}{ي ج} = \frac{ب ي + ي ج}{ي ج} = \frac{ب ي + ج ي}{ي ج}$$

$$\frac{ب ي - ه ي}{ه ي} = \frac{ب ي - ج ي}{ه ي}$$

ويكون  $ي ه = ي ج + ج ه$

$$\frac{ب ي}{ي ج} = \frac{ب ي + ج ي}{ي ج} = \frac{ب ي + ج ي}{ي ج}$$

$$\frac{ب ي - ه ي}{ه ي} = \frac{ب ي - ج ي}{ه ي}$$

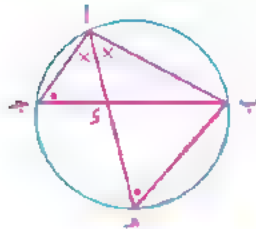
$ي ه = ي ج + ج ه = ١٠ + ٢ = ١٢$  سم

حاول أنا بحل

- (٢) اب ج مثلث فيه اب = ٣ سم، ب ج = ٧ سم، ج ا = ٦ سم. رسم  $\overleftrightarrow{ا ي}$  ينصف  $\Delta$ ، ويقطع ب ج في ي، ورسم  $\overleftrightarrow{ا ه}$  ينصف  $\Delta$  الخارجة ويقطع ج ب في ه. أ أثبت أن  $\overleftrightarrow{ا ب}$  متوسط في المثلث ا ج ه. ب أوجد النسبة بين مساحة المثلث ا ي ه ومساحة المثلث ا ج ه. إيجاد طول المنصف الداخلي والمنصف الخارجي لزاوية رأس مثلث.

المعريف  
مشهور

إذا كان  $\overleftrightarrow{ا ي}$  ينصف  $\Delta$  ا في  $\Delta$  اب ج من الداخل ويقطع ب ج في ي فإن:  $ا ي \times ا ب = ا ج \times ب ي - ب ي \times ي ج$



تذكر

$$ا ي \times ي ه - ب ي \times ي ج$$

المعطيات: اب ج مثلث،  $\overleftrightarrow{ا ي}$  ينصف  $\Delta$  اب ج من الداخل،  $\overleftrightarrow{ا ي} \cap \overleftrightarrow{ب ج} = {ي}$

المطلوب: (ا ي) =  $ا ب \times ا ج - ب ي \times ي ج$

البرهان : ارسم دائرة تمر برؤوس المثلث اب ج

وتقطع  $\overleftrightarrow{ا ي}$  في ه ارسم ب ه

فيكون:  $\Delta ا ج ي \sim \Delta ا ه ب$  (لماذا؟)،  $\frac{ا ي}{ا ب} = \frac{ا ه}{ا ج}$

$$\therefore ا ي \times ا ج = ا ه \times ا ب$$

$$ا ي \times (ا ي + ي ه) = ا ب \times ا ج$$

$$(ا ي)^2 = ا ب \times ا ج - ا ي \times ي ه$$

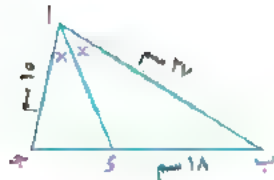
$$(ا ي)^2 = ا ب \times ا ج - ب ي \times ي ج$$

$$ا ي \text{ أن: } ا ي = \sqrt{ا ب \times ا ج - ب ي \times ي ج}$$

مثال

- (٤) اب ج مثلث فيه اب = ٢٧ سم، ا ج = ١٥ سم. رسم  $\overleftrightarrow{ا ي}$  ينصف  $\Delta$  ا ويقطع ب ج في ي. إذا كان ب ي = ١٨ سم احسب طول ا ي.

الحل



$$\therefore \overleftrightarrow{ا ي} \text{ ينصف } \Delta ا ج ب \therefore \frac{ا ي}{ي ج} = \frac{ب ي}{ا ج}$$

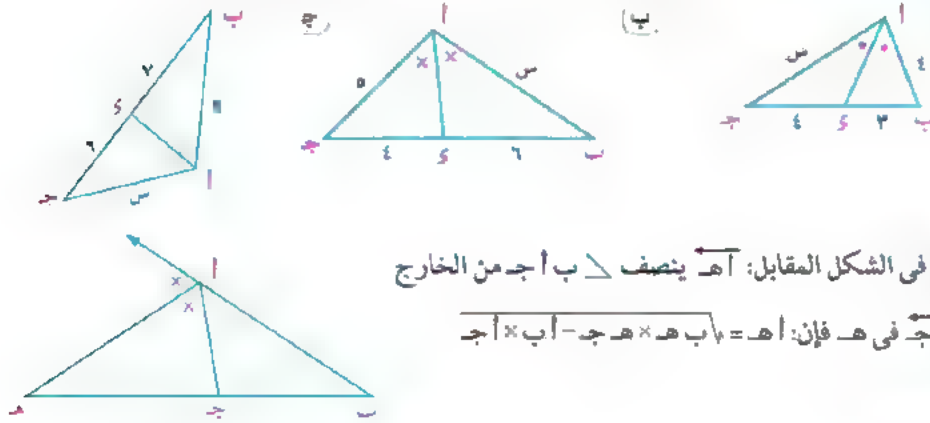
$$\text{ويكون } \frac{٢٧}{ي ج} = \frac{١٨}{١٥} \therefore ي ج = ١٠$$

$$\therefore ا ي = \sqrt{ا ب \times ا ج - ب ي \times ي ج}$$

$$\therefore ا ي = \sqrt{٢٧ \times ١٥ - ١٨ \times ١٠} = \sqrt{٢٢٥} = ١٥ \text{ سم}$$

حاول أن تحل

(٤) في كل من الأشكال التالية (الأبعاد مقدرة بالستيمترات) احسب قيمة  $s$  وطول  $\overline{آو}$

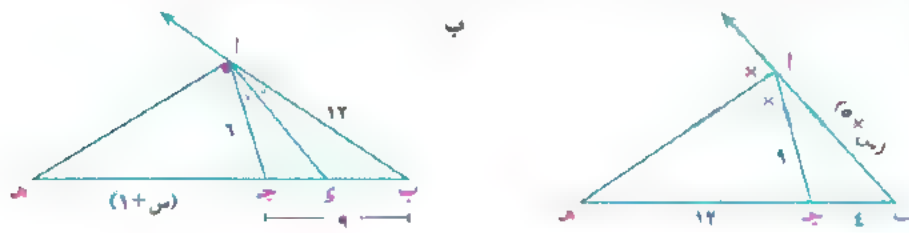


الخط أن: في الشكل المقابل:  $\overline{آه}$  ينصف  $\triangle أ ب ج$  من الخارج

ويقطع  $\overline{ب ج}$  في  $هـ$  فإن:  $أه = هـ ب = هـ ج$   $\therefore$   $أه = هـ ب = هـ ج$   $\therefore$   $أه = هـ ب = هـ ج$

حاول أن تحل

(٥) في كل من الأشكال التالية (الأبعاد مقدرة بالستيمترات) احسب قيمة  $s$ ، وطول  $\overline{آه}$



مثال

(٥) في الشكل المقابل:  $\overline{آو}$  متوسط في  $\triangle أ ب ج$

$\overline{و س}$  ينصف  $\triangle أ ب ج$  ويقطع  $\overline{آ ب}$  في  $س$ .

$\overline{و ص}$  ينصف  $\triangle أ ب ج$  ويقطع  $\overline{آ ج}$  في  $ص$ .

أثبت أن:  $\overline{و س} \parallel \overline{ب ج}$ .

الحل

في  $\triangle أ ب ج$ :  $\therefore \overline{و س}$  ينصف  $\triangle أ ب ج$

في  $\triangle أ ب ج$ :  $\therefore \overline{و ص}$  ينصف  $\triangle أ ب ج$

في  $\triangle أ ب ج$ :  $\therefore \overline{آو}$  متوسط

من (١)، (٢)، (٣)  $\frac{أ س}{س ب} = \frac{أ ص}{ص ج}$

$$(١) \quad \frac{أ س}{س ب} = \frac{أ س}{س ب}$$

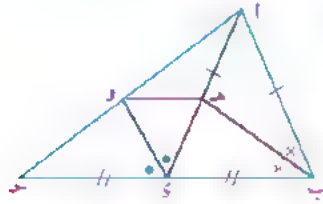
$$(٢) \quad \frac{أ س}{س ب} = \frac{أ س}{س ب}$$

$$(٣) \quad \frac{أ س}{س ب} = \frac{أ س}{س ب}$$

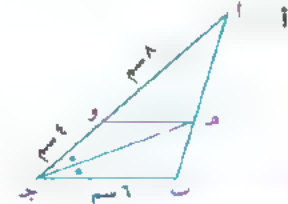
ويكون  $\overline{و س} \parallel \overline{ب ج}$ .

### حاول أن تحل

٦) في كل من الأشكال التالية أثبت أن:  $\overline{هـ و} // \overline{ب ج}$



ب



### تمثيل منطقي

في الشكل المقابل:  $د \in \overline{ب ج}$ .

كيف يمكن رسم  $\overline{ج هـ}$  بقطع  $\overline{ب أ}$  في هـ لحساب النسبة  $\frac{ب د}{د ج}$ ،  
إذا كان  $\frac{ب د}{د ج} = \frac{ب أ}{أ هـ}$  ماذا نستنتج؟

### حالات خاصة

١- في  $\triangle أ ب ج$ :

إذا كان  $د \in \overline{ب ج}$ ، حيث  $\frac{ب د}{د ج} = \frac{ب أ}{أ هـ}$

فإن:  $\overline{أ هـ}$  ينصف  $\triangle أ ب ج$

وإذا كان  $هـ \in \overline{ب ج}$ ، حيث  $\frac{ب د}{د ج} = \frac{ب هـ}{هـ ج}$

فإن:  $\overline{أ هـ}$  ينصف  $\triangle أ ب ج$  الخارجة عن المثلث  $أ ب ج$

ويعرف هذا بعكس النظرية السابقة.

٢- في الشكل المقابل:

$\overline{ب هـ}$ ،  $\overline{ج هـ}$  منصف زاويتا  $ب$ ،  $ج$

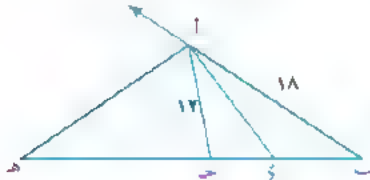
يتقاطعا في نقطة هـ  $\Rightarrow$   $\overline{أ هـ}$  ماذا تستنتج؟

**حقيقة:** منصفات زوايا المثلث تتقاطع في نقطة واحدة.

### مثال

٦)  $أ ب ج$  مثلث فيه  $أ ب = ١٨$  سم،  $ب ج = ١٥$  سم،  $أ ج = ١٢$  سم،  $د \in \overline{ب ج}$ ، حيث  $ب د = ٩$  سم.  
رسم  $\overline{أ هـ} \perp \overline{أ و}$  فقطع  $\overline{ب ج}$  في هـ. أثبت أن  $\overline{أ و}$  ينصف  $\triangle أ ب ج$  ثم أوجد طول  $\overline{ج هـ}$ .

### الحل



في  $\triangle أ ب ج$ :  $\frac{أ ب}{ب ج} = \frac{١٨}{١٥} = \frac{٣}{٥}$

$ج د = ب ج - ب د = ١٥ - ٩ = ٦$  سم

$\therefore \frac{ب د}{د ج} = \frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}$

$\therefore \frac{ب أ}{أ هـ} = \frac{ب د}{د ج}$

$\overline{أ و}$  ينصف  $\triangle أ ب ج$

∴  $\overline{AM}$  ينصف  $\Delta$  الخارجة عن  $\Delta$   $AB$  ج  
 ∴  $b = b + ج - ج - هـ$  ∴  $\frac{18}{11} = \frac{ج - هـ}{ج - هـ}$   
 ويكون  $\frac{b}{a} = \frac{ج - هـ}{ج - هـ}$   $\frac{18}{11}$  سم

٧) ابجدی شکل رباعی فیہ اب = ۱۸ سم، پ ج = ۱۲ سم۔ ہ ۵ آ ۱ بحیث ۲ ہ ۳ ہ ۵  
رسم ہو // و ج فقطع آ ج فی و۔ اثبت أن ب و ینصف ا ب ج۔

٧)  $\overline{AB}$  قطر في دائرة،  $\overline{AJ}$  وتر فيها. رسم  $\overline{JO}$  مماس للدائرة عند  $J$  فقطع  $\overline{AB}$  في  $I$ .

$$\frac{اھ}{بھ} = \frac{۱۵}{۵} \text{ ب}$$

أ.  $\overrightarrow{AJ}$  ينصف الزاوية الخارجة للمثلث جوه عند ج.

$$\frac{و ج}{ج ه} = \frac{ب ب}{ب ه}$$

∴ جیب ینصف  $\Delta$  ج فی  $\Delta$  و ج هـ.

∴  $\overline{AB}$  قطر في الدائرة

∴  $(\Delta \text{ اُجَب}) = 90^\circ$  ویکون  $\overline{ج\text{ا}} \perp \overline{ج\text{ب}}$

۱: جب ینصف  $\Delta$  ج فی  $\Delta$  اب چ

جاء منتصف للزاوية الخارجة عند ج

ویکون  $\frac{1}{\text{ام}} = \frac{1}{\text{ج}}$

من (١)، (٢) ينتج أن:  $\frac{1}{a} = \frac{b}{b-a}$  ،  $\therefore \frac{1}{a} = \frac{a}{a-b}$  (وهو المطلوب ثانياً)

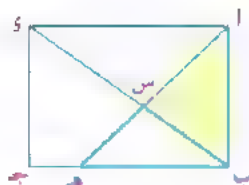
(٨) دائرتان م، ن متماسكتان من الخارج في ا. رسم مستقيم يوازي م  $\overline{MN}$  فقطع الدائرة م في ب، ج، والدائرة ن في د، هـ على الترتيب. فإذا تقاطع ب م، هـ ن في النقطة و. أثبت أن  $\overline{AO}$  ينصف  $\angle م و ن$ .

**حل مشكلات:** يبين الشكل المقابل تقسيمًا لقطعة أرض مستطيلة الشكل

إلى أربعة أقسام مختلفة بالعستقيمين  $\overrightarrow{ب\gamma}$ ،  $\overrightarrow{أه}$ ، حيث  $ه \ni ب\gamma$ ،  
 $\overrightarrow{ب\gamma} \cap \overrightarrow{أه} = \{س\}$ .

فإذا كان  $ا ب = ب هـ = ٤٣$  مترًا،  $ا و = ٥٦$  مترًا.

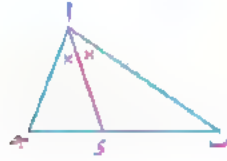
احسب مساحة القطعة أ ب س بالأمتار المربعة و طول آ س







### تمارين ٢ - ٣

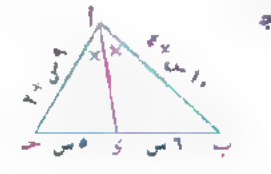
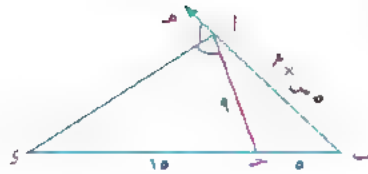
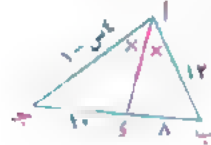


١) في الشكل المقابل:  $\overrightarrow{AD}$  ينصف  $\angle A$ . أكمل:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \quad \text{ب) } \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AD}$$

$$\frac{12}{10} = \frac{BD}{DC} \quad \text{ج) } \frac{12}{10} = \frac{BD}{DC}$$

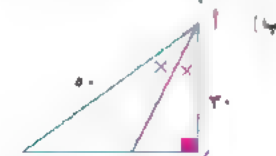
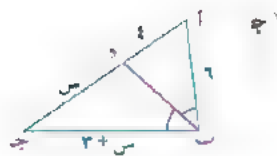
٢) في كل من الأشكال التالية، أوجد قيمة س (الأطوال مقدورة بالستيمترات)



٣) ا ب ج مثلث محيطه ٢٧ سم، رسم  $\overrightarrow{AD}$  ينصف  $\angle A$  ويقطع  $\overrightarrow{BC}$  في  $D$ .

إذا كان  $AD = 4$  سم،  $BD = 5$  سم، أوجد طول كل من  $AB$ ،  $AC$ ،  $BC$ .

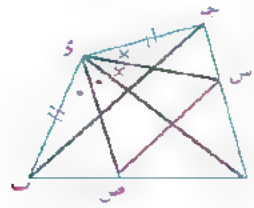
٤) في كل من الأشكال التالية أوجد قيمة س، ثم أوجد محيط  $\triangle ABC$ .



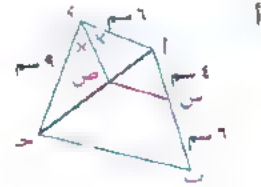
٥) ا ب ج مثلث فيه  $AB = 8$  سم،  $AC = 4$  سم،  $BC = 6$  سم، رسم  $\overrightarrow{AD}$  ينصف  $\angle A$  ويقطع  $\overrightarrow{BC}$  في  $D$ .

ورسم  $\overrightarrow{AE}$  ينصف  $\angle A$  الخارجة ويقطع  $\overrightarrow{BC}$  في  $E$ . أوجد طول كل من  $AD$ ،  $AE$ .

٦) في كل من الأشكال التالية: أثبت أن  $\overline{س} \parallel \overline{ب ج}$

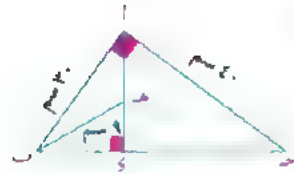


ب

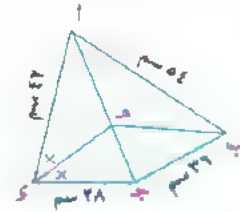


ا

٧) في كل من الأشكال التالية: أثبت أن  $\overline{ب هـ}$  ينصف  $\triangle ا ب ج$



ب

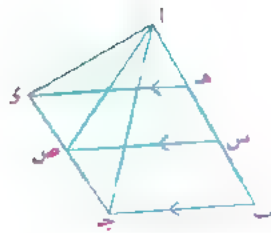


ا

٨) في الشكل المقابل:  $\overline{هـ د} \parallel \overline{س} \parallel \overline{ب ج}$

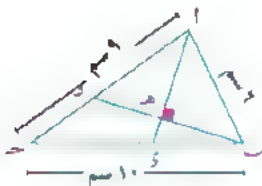
$$ا د \times ب س = ا ج \times هـ س$$

أثبت أن  $\overline{ا س}$  ينصف  $\triangle ج ا د$ .



٩) ا ب ج مثلث  $د$  ب ج،  $س$   $د$  ب ج حيث  $ج د = ا ب$ . رسم  $ح د \parallel ا س$  ويقطع  $ا ب$  في هـ، ورسم

$هـ و \parallel ب ج$  ويقطع  $ا ج$  في و أثبت أن  $\overline{ب و}$  ينصف  $\triangle ا ب ج$



١٠) في الشكل المقابل: ا ب ج مثلث فيه ا ب = سم، ا ج = ٩ سم،

$$ب ج = ١٠ سم، د ب ج بحيث ب د = ٤ سم،$$

رسم  $\overline{ب هـ} \perp \overline{ا د}$  ويقطع  $ا د$ ، ا ب في هـ، وعلى الترتيب،

ا أثبت أن  $\overline{ا و}$  ينصف  $\triangle ا$ .

ب أوجد م ( $\triangle ا ب و$ ): م ( $\triangle ج ب و$ )

## تطبيقات التناسب في الدائرة

### Applications of Proportionality in the Circle

٣ - ٣

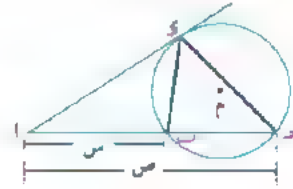
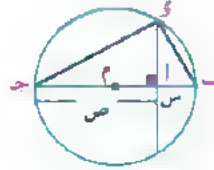
#### سوف تتعلم

- إيجاد قوة نقطة بالنسبة لدائرة.
- تحديد موقع نقطة بالنسبة لدائرة.
- إيجاد قياسات الزوايا الناتجة من تقاطع الأوتار والمماسات في الدائرة.
- نمذجة وحل تطبيقات تشمل إيجاد طول المصنف الداخلي والخارجي لزاوية



كيف يمكن إنشاء قطعة مستقيمة يكون طولها  $l$  وسطًا متناسبًا بين طولين  $s$ ،  $v$  لقطعتين معلومتين؟

في كل من الشكلين التاليين  $ab = s$ ،  $ac = v$ ،  $ad = l$



$\Delta aob \sim \Delta adc$  (لماذا؟)  $\therefore \frac{ab}{ad} = \frac{ao}{dc}$

ويكون  $\frac{s}{l} = \frac{l}{v}$ ،  $l^2 = s \times v$  أي أن  $l$  وسط متناسب بين  $s$ ،  $v$

#### المصطلحات الأساسية

Power of a point	قوة نقطة
Circle	دائرة
Chord	وتر
Tangent	مماس
Secant	قاطع
Diameter	قطر
Concentric Circles	دوائر متحدة المركز
Common External Tangent	مماس خارجي مشترك
Common Internal Tangent	مماس داخلي مشترك

#### الأدوات والوسائل

- أدوات هندسية لرسم والقياس



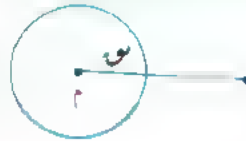
أنشئ قطعًا مستقيمة أطوالها  $3\sqrt{2}$ ،  $15\sqrt{2}$ ،  $4\sqrt{2}$

فأرر رسمك مع زملائك وتحقق من صحة إجابتك مستخدمًا الآلة الحاسبة والقياس.

#### Power of a point

#### أولاً: قوة نقطة بالنسبة لدائرة

**تعريف** قوة النقطة  $A$  بالنسبة للدائرة  $M$  التي طول نصف قطرها  $r$  هو العدد الحقيقي  $Q_M(A)$  حيث:  $Q_M(A) = (AM)^2 - r^2$



ملاحظات هامة

ملاحظة ١

- يمكن التنبؤ بموقع نقطة  $A$  بالنسبة للدائرة  $M$  فإذا كان:  $Q_M(A) < 0$  فإن  $A$  تقع خارج الدائرة.
- $Q_M(A) = 0$  فإن  $A$  تقع على الدائرة.
- $Q_M(A) > 0$  فإن  $A$  تقع داخل الدائرة.

### مثال

١) حدد موقع كل من النقط أ، ب، جـ بالنسبة للدائرة م التي طول نصف قطرها ٥ سم إذا كان:  
 وم (أ) = ١١ ، وم (ب) = صفر ، وم (جـ) = ١٦ ، ثم احسب بعد كل نقطة عن مركز الدائرة.

الحل

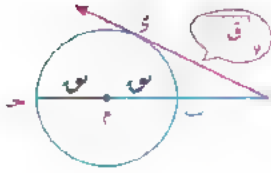
$$\begin{aligned}
 \text{وم (أ) = ١١} &< ٥ \therefore \text{النقطة خارج الدائرة} \\
 \text{وم (أ) = ١١} &= ٥ + ٦ \therefore \text{ب = ٦ سم} \\
 \text{وم (ب) = صفر} &= ٥ \therefore \text{ب = ٥ سم} \\
 \text{وم (جـ) = ١٦} &> ٥ \therefore \text{النقطة داخل الدائرة} \\
 \text{وم (جـ) = ١٦} &= ٥ + ١١ \therefore \text{جـ = ١١ سم}
 \end{aligned}$$

### حاول أن تحل

١) حدد موقع كل من النقط أ، ب، جـ بالنسبة للدائرة ن التي طول نصف قطرها ٣ سم، ثم احسب بعد كل نقطة عن مركز الدائرة في كل من الحالات الآتية:

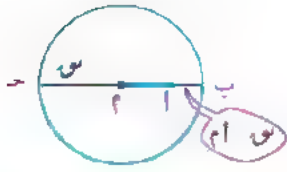
$$\begin{aligned}
 \text{أ وم (أ) = ١٥} \quad \text{ب وم (ب) = صفر} \quad \text{جـ وم (جـ) = -٤}
 \end{aligned}$$

### ملاحظة ٢



إذا وقعت النقطة خارج الدائرة م فإن: وم (أ) = م  
 $(م - م) (م + م) =$   
 $أب \times أج = م(أ)$   
 $\therefore \text{طول المماس المرسوم من النقطة أ للدائرة م} = \sqrt{م(أ)}$

### ملاحظة ٣



إذا وقعت النقطة داخل الدائرة م فإن: وم (أ) = م  
 $(م - م) (م + م) =$   
 $أب \times أج = م(أ)$

### وبصفة عامة

أ داخل الدائرة م



$$\text{وم (أ) = } -أب \times أج = -أب \times أج$$

أ خارج الدائرة م



$$\text{وم (أ) = } أب \times أج = أب \times أج = م(أ)$$

**مقال**

(٢) الدائرة م طول نصف قطرها ٣١ سم. النقطة أ تبعد عن مركزها ٢٣ سم، رسم الوتر ب ج حيث أ د ب ج،

اب = ۳ اج احسب:

ب بعد الوتر ب جـ عن مركز الدائرة.

أ طول الوتر ب ج

**الحل**

في الدائرة م:

ا. ب. ج. د. هـ. ز. ح. ط. ي. ك. ل. م. ن. س. ع. ف. ق. ر. ش. ت. ث. ظ. ذ. ض. ص.  $\therefore$  تقع داخل الدائرة ويكون

$$Q_1(a) = (a) - (a) = 0$$
$$12 = 3 \times 4 \quad \therefore 12 = 3(4) - 3(2)$$

∴ طول الوتر ب ج = ٤ أ ح = ٤ × ١٢ = ٤٨ سم



ب يفرض أن بعد الوتر عن مركز الدائرة = م و حيث م و  $\perp$  ب ج

∴  $\overline{M} \perp \overline{B_j}$  و متتصفاً  $\overline{B_j}$  و يكون  $B_j = M$  سم

$$\mu \approx 19.7 \approx \sqrt{380} = 5p \therefore \quad 380 = {}^p(28) - {}^p(31) = {}^p(5p) \therefore$$

جاول آن تحل

٢) الدائرة ن طول نصف قطرها ٨سم. النقطة ب تبعد ١٢سم عن مركز الدائرة، ورسم مستقيم يمر بالنقطة ب

ويقطع الدائرة في نقطتين ج، د، حيث ج د = ج د، احسب طول الوتر ج د وبعده عن النقطة ن.

مثال

٢) دائرتان م، ن متقاطعتان في ا، ب. جـ  $\in$  بـ ا، جـ  $\notin$  بـ ا، رسم جـ و فقطع الدائرة م في و، هـ حيث

جی = ۹ سم، ی = ۷ سم، ورسم جو یمنس الدائرة ن عند و.

أثبت أن  $W = (J)$  و  $W = (J)$ . ب. إذا كان  $Ab = 10$  اسم. أوجد طول كل من  $A$ ،  $J$ ،  $W$ .

**الحل**

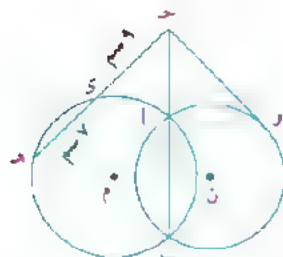
أ. ج تقع خارج الدائرة م، ج هـ، ج ب قاطعان للدائرة م.

∴ و (ج) = ج ی × ج ه = ج ا × ج پ (۱)

ج: تقع خارج الدائرة، جـب قاطع، جـو مماس لها.

(۲)  $\therefore (ج) = ج \times ا = ج \times (ج \times و)$

من (١)، (٢)  $\therefore 9 = (ج) \cdot 9 = 16 \times 9 = 144$



پ : اب = ۱۰ اسم      ۱۰ (جہ) = ج ا (ج ا + ۱۰) = (ج و) = ۱۴۴

∴ (جے اے) + ۱۰ = ۱۴۴ = جے اے

∴ (جو) = ۱۴۴ ∴ جو = ۱۲ اسم

### ملاحظته هامه

تسمى مجموعة النقاط التي لها نفس القوة بالنسبة لدائرتين مختلفتين بالمحور الأساسي للدائرتين.  
**فإذا كان  $و_م(أ) = و_ن(أ)$  فإن  $أ$  تقع على المحور الأساسي للدائرتين م، ن.**  
 في المثال السابق لاحظ أن:  $و_م(ج) = و_ن(ج)$  ،  $و_م(أ) = و_ن(أ)$  = صفرًا ،  $و_م(ب) = و_ن(ب)$  = صفرًا  
 ∴  $\overleftrightarrow{أب}$  محور أساسي للدائرتين م، ن.

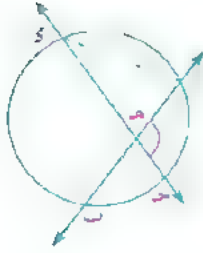
### حاول أن تحل

(٢) الدائرتان م، ن متمستان من الخارج في أ،  $\overleftrightarrow{أب}$  مماس مشترك للدائرتين م، ن،  $\overleftrightarrow{بج}$  يقطع الدائرة م في ج،  $\overleftrightarrow{دب}$  يقطع الدائرة ن في د، و  $\overleftrightarrow{هـ}$  و  $\overleftrightarrow{هـد}$  على الترتيب.  
 أ أثبت أن:  $\overleftrightarrow{أب}$  محور أساسي للدائرتين م، ن  
 ب إذا كان  $و_م(ب) = ٣٦$  ،  $ب ج = ٤سم$  ،  $هـ د = ٩سم$ . أوجد طول كل من  $\overleftrightarrow{ج د}$  ،  $\overleftrightarrow{أ ب}$  ،  $\overleftrightarrow{ب هـ}$ .

### ثانيًا: القاطع والمماس وقياسات الزوايا

سبق ودرست:

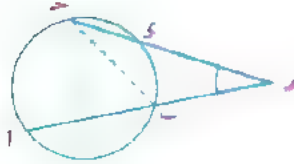
١- إذا تقاطع قاطعان داخل دائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف مجموع قياسي القوس المقابل لهذه الزاوية والقوس المقابل للزاوية التي تقابلها بالرأس.



في الشكل المقابل:  $\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{ج د} = [هـ]$

فإن:  $و(أ هـ ج) = \frac{1}{2} [و(أ ج) + و(ب د)]$

٢- إذا تقاطع قاطعان خارج دائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف الفرق الموجب بين قياسي القوسين المقابلين لها.

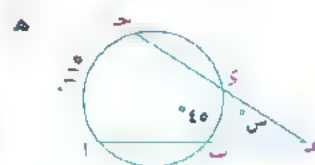
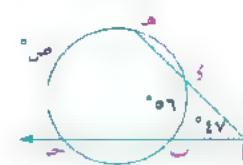
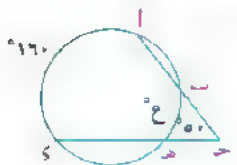
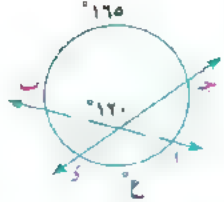


في الشكل المقابل:  $\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{ج د} = [هـ]$

فإن:  $و(أ هـ ج) = \frac{1}{2} [و(أ ج) - و(ب د)]$

### حاول أن تحل

(٤) في كل من الأشكال الآتية: أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس.



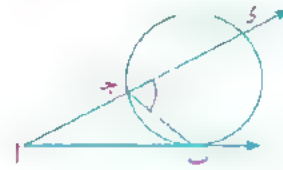
استنتاج قياس الزاوية الناتجة من تقاطع قاطع ومماس (أو مماسين) لدائرة.

تمرين  
مشهور

القاطع والمماس (أو المماسان) لدائرة المتقاطعان خارج الدائرة، يكون قياس زاوية تقاطعهما مساويًا نصف الفرق الموجب بين قياسي القوسين المقابلين لها.

البرهان

الحالة الأولى: تقاطع القاطع والمماس لدائرة.



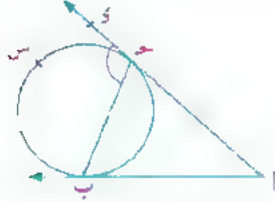
∴ ∠I جـ ب خارجة عن Δ أ ب جـ

$$\therefore \angle I = \angle (A) - \angle (B) = \angle (A) - \angle (B)$$

$$\frac{1}{2} \angle I = \frac{1}{2} \angle (A) - \frac{1}{2} \angle (B)$$

$$\frac{1}{2} \angle I = \angle (A) - \angle (B)$$

الحالة الثانية: تقاطع مماسين لدائرة.



∴ ∠I جـ ب خارجة عن Δ أ ب جـ

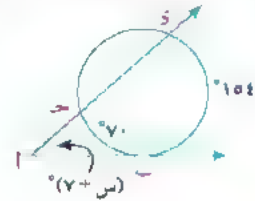
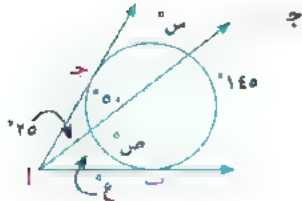
$$\therefore \angle I = \angle (A) - \angle (B) = \angle (A) - \angle (B)$$

$$\frac{1}{2} \angle I = \frac{1}{2} \angle (A) - \frac{1}{2} \angle (B)$$

$$\frac{1}{2} \angle I = \angle (A) - \angle (B)$$

حاول أن تحل

٥ مستعينًا بمعطيات الشكل، أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس.



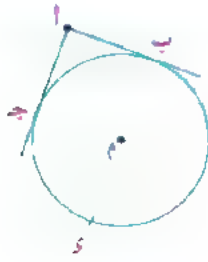
مثال

٤ الربط بالأقمار الصناعية: يدور قمر صناعي في مدار، محافظًا في أثناء دورانه على ارتفاع ثابت فوق منطقة خط الاستواء، وتستطيع آلة التصوير به رصد قوس طوله ٦٠١١ كم على سطح الأرض. إذا كان قياس هذا القوس ٥٤°، فأوجد:

أ قياس زاوية آلة التصوير الموضوعة على القمر الصناعي.

ب طول نصف قطر الأرض عند دائرة خط الاستواء.





الحل

نمذجة المشكلة: باعتبار الدائرة م هي دائرة خط الاستواء يكون

و (ب ج) =  $54^\circ$ ، وطول ب ج = ٦٠١١ كم.

١. قياس الدائرة =  $360^\circ$

٢. و (ب د ج) =  $360^\circ - 54^\circ = 306^\circ$

ويكون و (أ د ج) =  $\frac{1}{4}$  و (ب د ج) و (ب ج) و

$\frac{1}{4} = (306^\circ - 54^\circ) = 126^\circ$

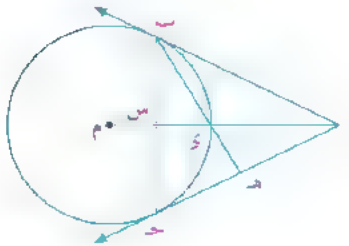
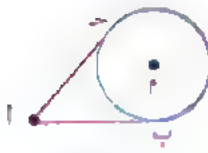
ب في الدائرة يتناسب طول القوس مع قياسه

٣.  $\frac{54^\circ}{360^\circ} = \frac{6011}{x \times \pi \times 2}$   $\therefore x = 62377,87$  كم

٤. طول نصف قطر الأرض عند خط الاستواء  $\approx 6378$  كم.

تذكر

طول القوس = قياس القوس  
محيط دائرة = قياس الدائرة



حاول أن تحل

٦. تدور بكرة عند محور م بواسطة سير يمر على بكرة صغيرة عند أ.

فإذا كان قياس الزاوية بين جزئي السير  $40^\circ$ ، فأوجد طول ب ج الأكبر، علماً بأن طول نصف قطر البكرة الكبرى ٩ سم.

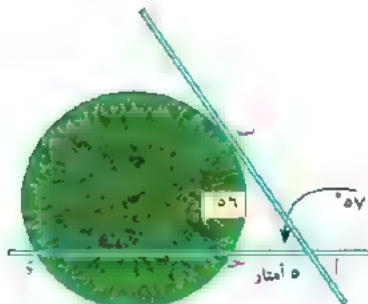
٧. في الشكل المقابل: دائرة م طول نصف قطرها ٩ سم، أ ب، أ ج مماسان للدائرة عند ب، ج. أ م يقطع الدائرة في د، ب ج في س

رسم ب د ي فقطع أ ج في هـ إذا كان و (أ) =  $144^\circ$  أوجد:

أ طول أ ب

ب طول أ س

تحقق من فهمك



حل مشكلة: يبين الشكل المقابل مخططاً لحديقة على شكل

دائرة. أنشئ ممرين للمشاة أحدهما خارج الحديقة يمسها في النقطة

ب والاخر يقطع الحديقة في نقطتي ج، د ويتقاطع الممران عند أ.

إذا كان و (أ) =  $100^\circ$ ، أ ج = ٥ أمتار.

أوجد طول كل من أ ب، أ ج، ثم أوجد و (ب د).

## تمارين ٣-٣

(١) حدد موقع كل من النقط التالية بالنسبة إلى الدائرة م، والتي طول نصف قطرها ١٠ سم، ثم احسب بُعد كل نقطة عن مركز الدائرة.

$$ج \text{ و } م (ج) = \text{صفر}$$

$$ب \text{ و } م (ب) = ٩٦$$

$$أ \text{ و } م (أ) = ٣٦$$

(٢) أوجد قوة النقطة المعطاة بالنسبة إلى الدائرة م، والتي طول نصف قطرها م:

$$أ \text{ النقطة } أ \text{ حيث } أ م = ١٢ \text{ سم، } م = ٩ \text{ سم}$$

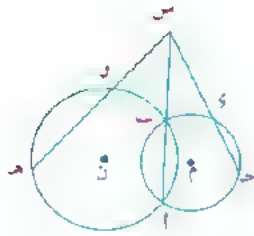
$$ب \text{ النقطة } ب \text{ حيث } ب م = ٨ \text{ سم، } م = ١٥ \text{ سم}$$

$$ج \text{ النقطة } ج \text{ حيث } ج م = ٧ \text{ سم، } م = ٧ \text{ سم}$$

$$د \text{ النقطة } د \text{ حيث } د م = ١٧ \text{ سم، } م = ٤ \text{ سم}$$

(٣) إذا كان بعد نقطة عن مركز دائرة يساوي ٢٥ سم وقوة هذه النقطة بالنسبة إلى الدائرة يساوي ٤٠٠، أوجد طول نصف قطر هذه الدائرة.

(٤) الدائرة م طول نصف قطرها ٢٠ سم. النقطة تبعد عن مركز الدائرة مسافة ١٦ سم، رسم الوتر ب ج حيث أ ب ج د، أ ب = ٢ ج. احسب طول الوتر ب ج.



(٥) في الشكل المقابل: الدائرتان م، ن متقاطعتان في أ، ب

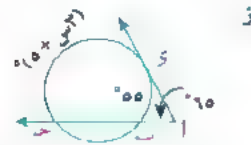
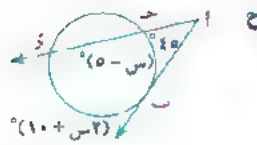
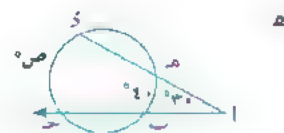
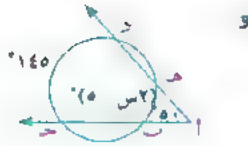
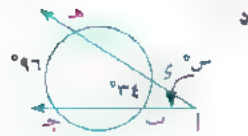
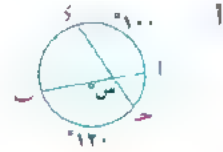
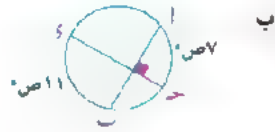
حيث  $\overleftrightarrow{أ ب} \cap \overleftrightarrow{ج د} = \overleftrightarrow{ه و} - (س)$ ،  $س د = ٢$  ج،  $ه و = ١٠$  سم،  $و (س) = ١٤٤$ .

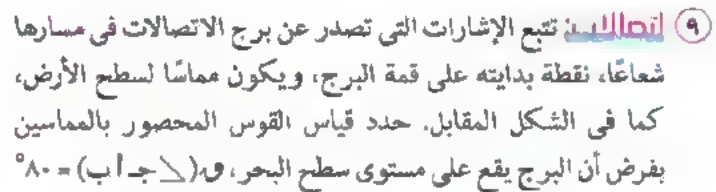
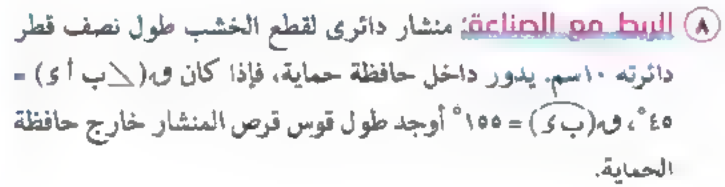
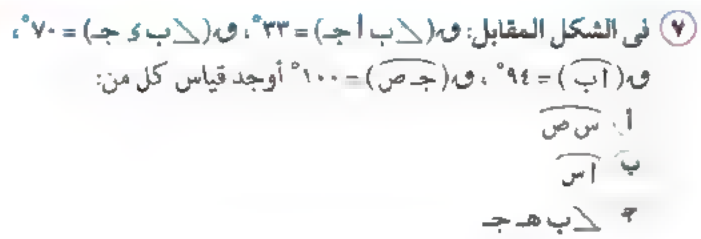
أ أثبت أن  $\overleftrightarrow{أ ب}$  محور أساسي للدائرتين م، ن.

ب أوجد طول كل من  $\overleftrightarrow{س ج}$ ،  $\overleftrightarrow{س و}$

ج أثبت أن الشكل ج د و ه رباعي دائري.

٦) مستعينًا بمعطيات الشكل، أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس.



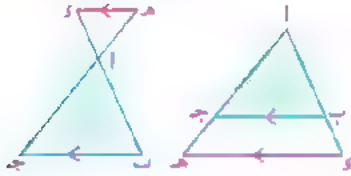


**فم بزيارة المواقع الآنية:**



## ملخص الوحدة

**نظرية ١:** إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع المثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع متناسبة.

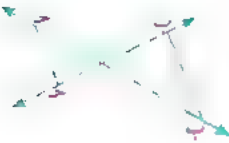


**نتيجة:** إذا رسم مستقيم خارج مثلث  $أ ب ج$  يوازي ضلعاً من أضلاع المثلث وليكن  $ب ج$  ويقطع  $أ ب$ ،  $أ ج$  في  $د$ ،  $هـ$  على الترتيب (كما في الشكل)

$$\frac{أد}{أب} = \frac{أهـ}{أج} \quad \frac{أد}{أب} = \frac{أهـ}{أج} \quad \frac{أد}{أب} = \frac{أهـ}{أج}$$

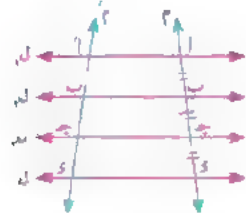
**عكس نظرية ١:** إذا قطع مستقيم ضلعين من أضلاع مثلث، وقسمهما إلى أطوالها متناسبة فإنه يوازي الضلع الثالث.

**نظرية نابيس العامة Talis Theorem:** إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمتان متوازية، فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.



**حالات خاصة**

١- إذا تقاطع المستقيمان  $م$ ،  $م'$  في النقطة  $أ$  وكان:  $ب ب' // ج ج'$ ، فإن:  $\frac{أب}{أج} = \frac{أب'}{أج'}$  وبالعكس: إذا كان:  $\frac{أب}{أج} = \frac{أب'}{أج'}$  فإن:  $ب ب' // ج ج'$



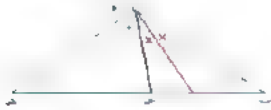
٢- إذا كان  $ل$ ،  $ل' // ل$ ،  $ل' // ل$ ، وكان:  $أ ب = ج د$ ، فإن:  $أ ب' = ج د'$

وقطعها المستقيمان  $م$ ،  $م'$  وكان:  $أ ب = ج د$ ، فإن:  $أ ب' = ج د'$

فإن:  $أ ب' = ج د'$

**نظرية ٣ منصف زاوية مثلث Triangle - Angle - Bisector:** إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الراوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس، قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو الخارج إلى جرائين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين

**ملاحظة هامة:** في الشكل المقابل



١-  $ب ج$  تنقسم من الداخل في  $د$  ومن الخارج في  $هـ$  بنسبة واحدة فيكون  $\frac{أد}{أب} = \frac{أهـ}{أج}$

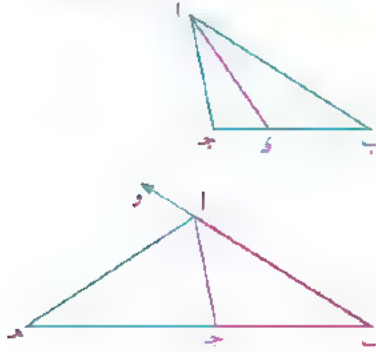
٢- المنصف الداخلي والمنصف الخارجي لزاوية في مثلث متعامدان؛ أي أن:  $أد \perp أهـ$

٣- إذا كان  $أ ب < أ ج$  قطع منصف  $\angle أ$  الضلع  $ب ج$  في  $د$ ، حيث  $ب د < د ج$ ، أما منصف الزاوية الخارجة عند  $أ$  فيقطع  $ب ج$  في  $هـ$ ، حيث  $ب هـ < هـ ج$

$$٤- أ د = \sqrt{أ ب \times أ ج - ب د \times د ج}$$

$$٥- أ هـ = \sqrt{أ ب \times أ ج + ب هـ \times هـ ج}$$

## ملخص الوحدة



حالات خاصة عكس نظرية (٣)

١- في  $\triangle ABC$  ج:

إذا كان  $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$  حيث  $D$  على  $BC$  حيث  $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$   
فإن:  $AD$  ينصف  $\angle A$

وإذا كان  $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$  حيث  $D$  على  $BC$  حيث  $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$   
فإن:  $AD$  ينصف  $\angle A$  الخارجة عن المثلث  $ABC$

٢- حقيقة: منتصفات زوايا المثلث تتقاطع في نقطة واحدة.

أولاً: قوة نقطة بالنسبة لدائرة Power of a point

قوة النقطة  $P$  بالنسبة للدائرة  $M$  التي طول نصف قطرها هو  $r$  هو العدد الحقيقي  $PM^2 - r^2$  حيث:

$$PM^2 - r^2 = (P, M)$$

فإذا كان  $(P, M) < 0$  فإن  $P$  تقع خارج الدائرة  $M$

وإذا كان  $(P, M) = 0$  فإن  $P$  تقع على الدائرة  $M$

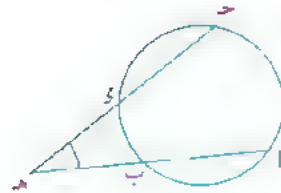
وإذا كان  $(P, M) > 0$  فإن  $P$  تقع داخل الدائرة  $M$

ثانياً: القاطع والمماس وقياسات الزاوية.

١- قياس الزاوية الناتجة من تقاطع قاطعين داخل دائرة:

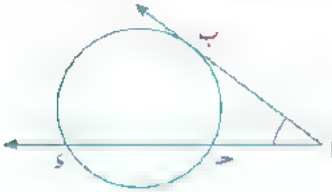
$P$  خارج الدائرة:

$P$  داخل الدائرة



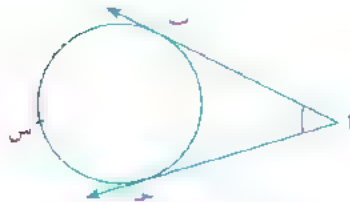
$$\angle APC = \frac{1}{2} (\angle AOC - \angle BOD)$$

$$\angle APC = \frac{1}{2} (\angle AOC + \angle BOD)$$



٢- قياس الزاوية الناتجة من تقاطع قاطع ومماس للدائرة

$$\angle APC = \frac{1}{2} (\angle AOC - \angle BOD)$$



٣- قياس الزاوية الناتجة من تقاطع مماسين لدائرة.

$$\angle APC = \frac{1}{2} (\angle AOC - \angle BOD)$$

# حساب المثلثات Trigonometry



## أهداف التعلم

في نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف الزاوية الموجهة.
- يتعرف الوضع القياسي للزاوية الموجهة.
- يتعرف القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة
- يتعرف نوع قياس الزوايا بالتقديرين (الستيني والدائري).
- يتعرف القياس الدائري للزوايا المركزية في دائرة.
- يستخدم آلة احساسة في إجراء العمليات الحسابية الخاصة بالتحويل من القياس الدائري إلى القياس الستيني والعكس.
- يتعرف الدوال المثلثية.
- يحدد إشارات الدوال المثلثية في الأرباع الأربعة
- يستنتج أن مجموعة الزوايا المتكافئة لها نفس الدوال المثلثية.
- يتعرف النسب المثلثية للزاوية الحادة ولأى زاوية.
- يستنتج النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة
- يتعرف الزوايا المتتمة  $(\theta \pm 180^\circ)$ ،  $(\theta \pm 360^\circ)$ ،  $(\theta \pm 90^\circ)$ ،  $(\theta \pm 270^\circ)$ .
- يعطى الحل العام للمعادلات المثلثية على الصورة:  
« جا إس = جتا ب س » « ظا إس = ظتا ب س »  
« قاس = قتا ب س »  
يوجد قياس روية معلوم، حدى قيم النسب المثلثية لها.
- يتعرف التمثيل البياني لدوال الجيب وجيب التمام ويستنتج خواص كل منهما.
- يستخدم آلة الحاسبة العلمية في حساب النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة.
- يمدج بعض الظواهر الفيزيائية والحياتية والتي تمثلها دوال مثلثية.
- يستخدم تكنولوجيا المعلومات في التعرف على تطبيقات متعددة للمفاهيم الأساسية لحساب المثلثات

## المفاهيم الأساسية

قياس ستيني	Degree Measure	قياس موجب	دالة مثلثية	قاطع	Secant
قياس دائري	Radian Measure	Positive Measure	Trigonometric Function	ظل تمام	Cotangent
زاوية موجهة	Directed Angle	قياس سالب	جيب	دالة دائرية	Circular Function
زاوية نصف قطرية (راديان)	Radian	Negative Measure	جيب تمام	الزاوية المتتمة	Related Angles
وضع قياسي	Standard Position	زاوية مكافئة	ظل		
		زاوية ربعة	ظل تمام		
			Cosine		
			Tangent		
			Cosecant		





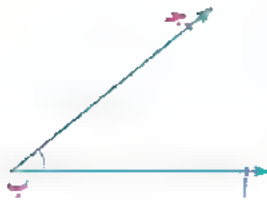
## الزاوية الموجهة

### Directed Angle

٤ - ١

#### سوف تتعلم

- مفهوم الزاوية الموجهة.
- لوضع القياس للزاوية الموجهة.
- لقياس الموجب والسالب للزاوية الموجهة.
- موقع الزاوية الموجهة في مستوى لإحداثي المتعامد.
- مفهوم الروابا التكافؤ



سبق لك أن تعرفت على أن الزاوية هي اتحاد شعاعين لهما نقطة بداية واحدة.  
في الشكل المرسوم تسمى النقطة ب «رأس الزاوية»  
والشعاعان  $\vec{BA}$  ،  $\vec{BC}$  **ضلعاً الزاوية**  
أي أن:  $\vec{BA} \cup \vec{BC} = \angle ABC$   
وتكتب كذلك  $\widehat{ABC}$ .

#### Degree Measure System

#### القياس الستيني للزاوية

علمت أن القياس الستيني يعتمد على تقسيم الدائرة إلى ٣٦٠ قوساً متساوية في الطول.  
وبالتالي فإن:

١- الزاوية المركزية التي ضلعاها يمران بنهايتي أحد هذه الأقواس يكون قياسها درجة واحدة (١°)

٢- تنقسم الدرجة إلى ٦٠ جزءاً، كل منها يسمى دقيقة، وترمز له بالرمز (')

٣- تنقسم الدقيقة إلى ٦٠ جزءاً، كل منها يسمى ثانية، وترمز له بالرمز (')

أي أن:  $1^\circ = 60'$  ،  $1' = 60''$

#### المصطلحات الأساسية

Degree Measure	قياس ستيني
Directed angle	زاوية موجهة
Standard Position	وضع قياسي
Positive measure	قياس موجب
Negative measure	قياس سالب
Equivalent Angle	زاوية مكافئة
Quadrantal Angle	زاوية ربعية

#### Directed Angle

#### الزاوية الموجهة



إذا راعينا ترتيب الشعاعين المكونين للزاوية فإنه يمكن كتابتهما على شكل الزوج المرتب (  $\vec{OA}$  ،  $\vec{OB}$  ) حيث  
العنصر الأول  $\vec{OA}$  هو الضلع الابتدائي للزاوية،  
العنصر الثاني  $\vec{OB}$  هو الضلع النهائي للزاوية التي رأسها نقطة و كما بالشكل (١).



أما إذا كان الضلع الابتدائي  $\vec{OB}$  ، الضلع النهائي  $\vec{OA}$   
فتكتب عندئذ (  $\vec{OB}$  ،  $\vec{OA}$  ) كما في شكل (٢).

#### الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية.

**تعريف** الزاوية الموجهة هي زوج مرتب من شعاعين هما ضلعها الراوية، لهما نقطة بداية واحدة هي رأس الزاوية.

**تمثيل** بالقد.

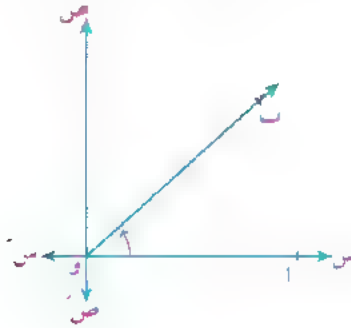
هل  $(\vec{OA}, \vec{OB}) = (\vec{OB}, \vec{OA})$ ؟ فسر إجابتك.

Standard position of the directed angle

**الوضع القياسي للزاوية الموجهة**

تكون الزاوية في وضع قياسي إذا كان رأس هذه الزاوية هو نقطة الأصل في نظام إحداثي متعامد، وضلعها الابتدائي يقع على الجزء الموجب لمحور السينات.

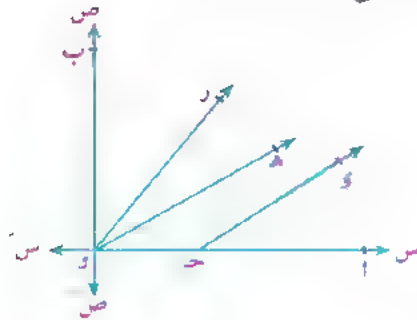
هل  $\angle AOB$  الموجهة في الوضع القياسي؟ فسر إجابتك.



**تعبير شفهى**

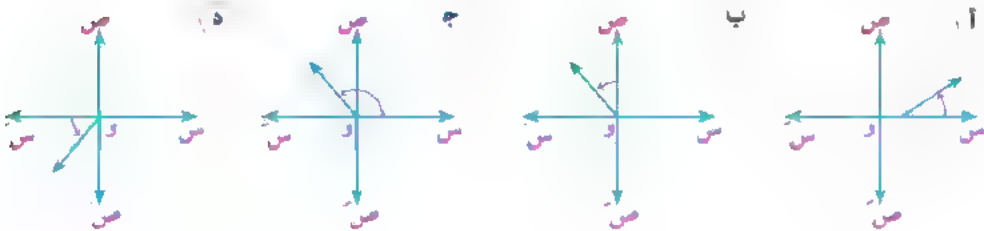
أي من الأزواج المرتبة التالية يعبر عن زاوية موجهة في وضعها القياسي؟ فسر إجابتك.

- |    |                        |   |                        |
|----|------------------------|---|------------------------|
| أ  | $(\vec{OA}, \vec{OB})$ | ب | $(\vec{OB}, \vec{OA})$ |
| ج  | $(\vec{OA}, \vec{OB})$ | د | $(\vec{OB}, \vec{OA})$ |
| هـ | $(\vec{OA}, \vec{OB})$ | و | $(\vec{OB}, \vec{OA})$ |



**حاول أن تحل**

① أى الزوايا الموجهة التالية في وضعها القياسي؟ فسر إجابتك.

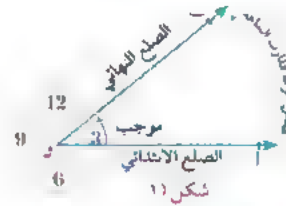


## القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة:

### Positive and negative measures of a directed angle

في شكل (١) يكون قياس الزاوية الموجهة موجباً إذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائي  $\vec{OA}$  إلى الضلع النهائي  $\vec{OB}$  ، في عكس اتجاه حركة عقارب الساعة.

في شكل (٢) يكون قياس الزاوية الموجهة سالباً إذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائي  $\vec{OA}$  إلى الضلع النهائي  $\vec{OB}$  ، هو نفس اتجاه حركة عقارب الساعة.



مثال

١) أوجد قياس الزاوية الموجهة  $\theta$  المشار إليها في كل شكل من الأشكال الآتية:



الحل

نعلم أن مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة يساوي  $360^\circ$

$$\begin{aligned} 360^\circ - 55^\circ &= \theta \quad 1 \\ 360^\circ - 33^\circ &= \theta \quad 2 \\ 360^\circ - 125^\circ &= \theta \quad 3 \\ 360^\circ - 134^\circ &= \theta \quad 4 \end{aligned}$$

حاول أن تحل

٢) أوجد قياس الزاوية الموجهة (و) المشار إليها في كل شكل من الأشكال الآتية:

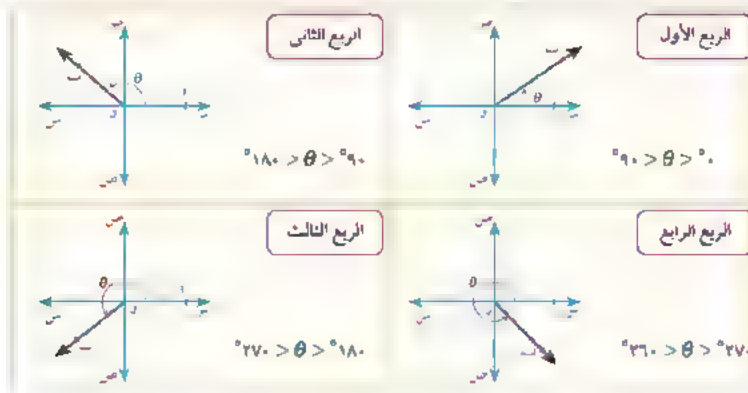


### موقع الزاوية في المستوى الإحداثي المتعامد: Angle's position in the orthogonal coordinate plane

يُقسم المستوى الإحداثي المتعامد إلى أربعة أرباع كما في الشكل المقابل.



إذا كانت  $\angle AOB$  الموجبة في الوضع القياسي والتي قياسها الموجب هو  $(\theta)$  فإن ضلعها النهائي  $\vec{OB}$  يمكن أن يقع في أحد الأرباع:



إذا وقع الضلع النهائي  $\vec{OB}$  على أحد محوري الإحداثيات تسمى الزاوية في هذه الحالة بالزاوية الربعية (Quadrantal angle)، فتكون الزوايا التي قياساتها  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$  هي زوايا ربعية.

### مثال

٢ عین الربع الذي تقع فيه كل من الزوايا التي قياساتها كالآتي:

- أ  $48^\circ$  ب  $217^\circ$  ج  $135^\circ$  د  $295^\circ$  هـ  $270^\circ$

### الحل

- أ  $0^\circ < 48^\circ < 90^\circ$  فهي تقع في الربع الأول.  
 ب  $180^\circ < 217^\circ < 270^\circ$  فهي تقع في الربع الثالث.  
 ج  $90^\circ < 135^\circ < 180^\circ$  فهي تقع في الربع الثاني.  
 د  $270^\circ < 295^\circ < 360^\circ$  فهي تقع في الربع الرابع.  
 هـ  $270^\circ$  زاوية ربعية.

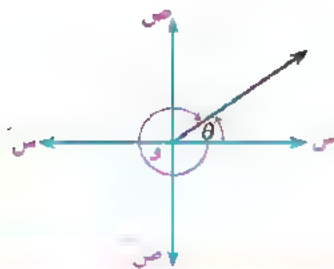
### حاول أن تحل

٢ عین الربع الذي تقع فيه كل من الزوايا التي قياساتها كالآتي:

- أ  $88^\circ$  ب  $152^\circ$  ج  $180^\circ$  د  $300^\circ$  هـ  $196^\circ$

### ملاحظة:

- إذا كان  $(\theta)$  هو القياس الموجب لزاوية موجبة فإن القياس السالب لها يساوي  $(\theta - 360^\circ)$   
 وإذا كان  $(-\theta)$  هو القياس السالب لزاوية موجبة فإن القياس الموجب لها يساوي  $(-\theta + 360^\circ)$



### مثال

(٣) عين القياس السالب لزاوية قياسها  $275^\circ$ .

**الحل**

القياس السالب للزاوية ( $275^\circ$ )  $= 360^\circ - 275^\circ = 85^\circ$

التحقيق:  $360^\circ = 85^\circ + 275^\circ = |85^\circ| + |275^\circ|$

**حاول أن تحل**

(٤) عين القياس السالب للزاويا التي قياساتها كالآتي:

د  $315^\circ$

ج  $310^\circ$

ب  $370^\circ$

أ  $32^\circ$

### مثال

(٤) عين القياس الموجب للزاوية  $235^\circ$

**الحل**

القياس الموجب للزاوية ( $235^\circ$ )  $= 360^\circ - 235^\circ = 125^\circ$

التحقيق:  $360^\circ = 125^\circ + 235^\circ = |125^\circ| + |235^\circ|$

**حاول أن تحل**

(٥) عين القياس الموجب لكل زاوية من الزوايا الآتية:

د  $32^\circ$

ج  $9^\circ$

ب  $126^\circ$

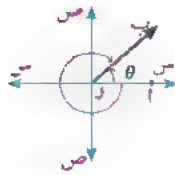
أ  $52^\circ$

(٦) **الربط بالألعاب الرياضية:** يدور أحد لاعبي القرص بزاوية قياسها  $150^\circ$  ارسم هذه الزاوية في الوضع القياسي.

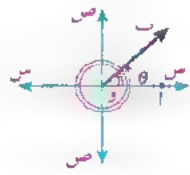
### Equivalent angles

### الزوايا المتكافئة

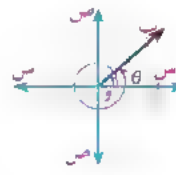
تأمل الأشكال الآتية وحدد الزاوية الموجهة ( $\theta$ ) في الوضع القياسي لكل شكل. ماذا تلاحظ؟



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)



شكل (٤)

في الأشكال (١)، (٢)، (٣)، (٤) نلاحظ أن الزاوية ( $\theta$ ) والزاوية المرسومة معها لهما نفس الضلع النهائي و  $\overrightarrow{OP}$ .

شكل (١): الزاوية التي قياسها  $\theta$  في الوضع القياسي.

شكل (٢): الزاويتان  $\theta$ ،  $\theta + 360^\circ$  متكافئتان.

شكل (٣): الزاويتان  $\theta$ ،  $\theta + 2 \times 360^\circ$  متكافئتان.

شكل (٤): الزاويتان  $\theta$ ،  $\theta - 360^\circ = (\theta - 360^\circ)$  متكافئتان

مما سبق نستنتج أن:

عند رسم زاوية موجهة قياسها  $\theta$  في الوضع القياسي فإن جميع الزوايا التي قياساتها:  
 $360 \times 1 \pm \theta$  أو  $360 \times 2 \pm \theta$  أو  $360 \times 3 \pm \theta$  أو ..... أو  $360 \times n \pm \theta$  حيث  $n \in \mathbb{Z}$   
 يكون لها نفس الضلع النهائي، وتسمى **زوايا متكافئة**.

### مثال

٥) أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب مشتركين في الضلع النهائي لكل من الزاويتين الآتيتين:

أ  $120^\circ$  ب  $230^\circ$

الحل

أ زاوية بقياس موجب:  $120^\circ + 360^\circ = 480^\circ$  (بإضافة  $360^\circ$ )

زاوية بقياس سالب:  $120^\circ - 360^\circ = -240^\circ$  (بطرح  $360^\circ$ )

ب زاوية بقياس موجب:  $230^\circ + 360^\circ = 590^\circ$  (بإضافة  $360^\circ$ )

زاوية بقياس سالب:  $230^\circ - 360^\circ = -130^\circ$  (بطرح  $360^\circ$ )

**ملاحظة:** هل توجد زوايا أخرى بقياس موجب، وأخرى بقياس سالب؟ اذكر بعض هذه الزوايا إن وجدت.

حاول أن تحل

٧) أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب مشتركين في الضلع النهائي لكل من الزوايا الآتية:

أ  $40^\circ$  ب  $150^\circ$  ج  $125^\circ$  د  $-240^\circ$  هـ  $180^\circ$

٨) **اكتشف الخطأ:** جميع قياسات الزوايا التالية مكافئة للزاوية  $75^\circ$  في الوضع القياسي ما عدا الإجابة.

أ  $-285^\circ$  ب  $-645^\circ$  ج  $285^\circ$  د  $435^\circ$

١) عين الربع الذي تقع فيه كل زاوية من الزوايا التي قياساتها كالآتي:

أ  $56^\circ$  ب  $325^\circ$  ج  $57^\circ$  د  $166^\circ$  هـ  $39^\circ$

٢) عين أحد القياسات السالبة لكل زاوية من الزوايا التي قياساتها كالآتي:

أ  $43^\circ$  ب  $214^\circ$  ج  $125^\circ$  د  $9^\circ$  هـ  $312^\circ$

٣) عين أصغر قياس موجب لكل زاوية من الزوايا الآتية:

أ  $-56^\circ$  ب  $-215^\circ$  ج  $-495^\circ$  د  $-93^\circ$  هـ  $-450^\circ$

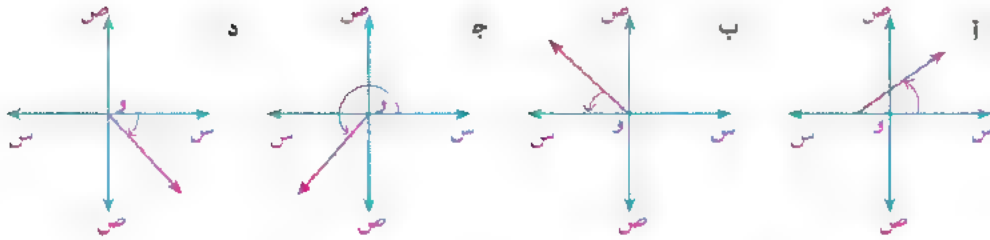


## تمارين ٤ - ١

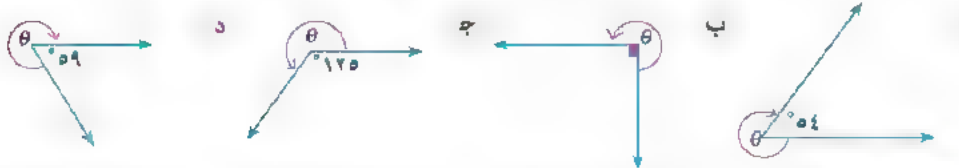
١ أكمل:

- أ تكون الزاوية الموجهة في وضع قياسي إذا كان
- ب يقال للزاوية الموجهة في الوضع القياسي أنها متكافئة إذا كان
- ج تكون الزاوية موجبة إذا كان دوران الزاوية ..... وتكون سالبة إذا كان دوران الزاوية
- د إذا وقع الضلع النهائي للزاوية الموجهة على أحد محاور الإحداثيات تسمى
- هـ إذا كان  $\theta$  قياس زاوية موجهة في الوضع القياسي،  $\exists \varphi$  فإن  $(\theta + n \times 360^\circ)$  تسمى بالزوايا
- و أصغر قياس موجب للزاوية التي قياسها  $530^\circ$  هو
- ز الزاوية التي قياسها  $930^\circ$  تقع في الربع
- ح أصغر قياس موجب للزاوية التي قياسها  $690^\circ$  هو

٢ أي من الزوايا الموجهة الآتية في الوضع القياسي



٣ أوجد قياس الزاوية الموجهة  $\theta$  المشار إليها في كل شكل من الأشكال التالية:



٤ عين الربع الذي تقع فيه كل من الزوايا التي قياساتها كالاتي:

- أ  $24^\circ$       ب  $215^\circ$       ج  $40^\circ$       د  $220^\circ$       هـ  $640^\circ$

⑤ ضع كلاً من الزوايا الآتية في الوضع القياسي، موضعاً ذلك بالرسم:

- أ ٢٢° ب ١٤٠° ج ٨٠° د ١١٠° هـ ٣١٥°

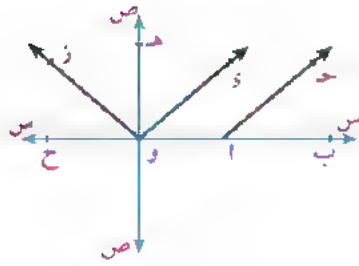
⑥ عين أحد القياسات السالبة لكل زاوية من الزوايا الآتية:

- أ ٨٣° ب ١٣٦° ج ٩٠°

- د ٢٦٤° هـ ٩٦٤° و ١٠٧٠°

⑦ عين أصغر قياس موجب لكل زاوية من الزوايا الآتية:

- أ ١٨٣° ب ٢١٧° ج ٢١٥° د ٥٧٠°



⑧ في الشكل المقابل: أيا من الأزواج المرتبة الآتية تعبر

عن زاوية موجهة في وضعها القياسي؟ لماذا؟

- أ (أ، و) ب (و، ز) ج (أ، ج) د (و، هـ) هـ (و، ز) و (و، ب)

⑨ يدور أحد لاعبي الجمناز على جهاز الألعاب بزاوية قياسها ٢٠٠° ارسم هذه الزاوية في الوضع القياسي

١٠) **اكتشف الخطأ:** اكتب قياس أصغر زاوية بقياس موجب وزاوية أخرى بقياس سالب تشتركان مع الضلع النهائي للزاوية (١٣٥°)

**إجابة زياد**

أصغر زاوية بقياس موجب = ١٣٥° - ٣٦٠° = ٢٢٥°

أصغر زاوية بقياس سالب = ١٣٥° - ٣٦٠° = ٤٩٥°

**إجابة كريم**

أصغر زاوية بقياس موجب = ١٣٥° + ١٨٠° - ٤٥°

أصغر زاوية بقياس سالب = ١٣٥° - ١٨٠° = ٣١٥°

أي الإجابتين صحيح؟ فسر إجابتك.

## القياس الستيني والقياس الدائري لزاوية

### Degree Measure and Radian Measure of an Angle

٢ - ٤

#### سوف تتعلم

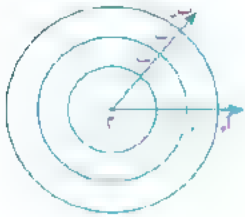
- مفهوم القياس الدائري لزاوية.
- لعلامة بين القياس الستيني والقياس الدائري.
- كيفية إيجاد طول قوس في دائرة.



سبق أن علمت أن القياس الستيني ينقسم إلى درجات ودقائق وثوان، وأن الدرجة الواحدة = 60 دقيقة، وأن الدقيقة الواحدة = 60 ثانية.  
هل توجد قياسات أخرى للزاوية؟

#### Radian Measure

#### القياس الدائري



١- ارسم مجموعة من الدوائر المتحدة المركز كما في الشكل المقابل.

٢- أوجد النسبة بين طول قوس أي زاوية مركزية وطول نصف قطر دائرتها المناظرة - ماذا تلاحظ؟

نلاحظ أن النسبة بين طول قوس أي زاوية مركزية، وطول نصف قطر دائرتها المناظرة تساوي مقدارًا ثابتًا.

$$\text{أي أن: } \frac{\text{طول القوس}}{\text{نصف قطر الدائرة}} = \frac{\text{طول القوس}}{\text{نصف قطر الدائرة}} = \frac{\text{طول القوس}}{\text{نصف قطر الدائرة}} = \text{مقدار ثابت.}$$

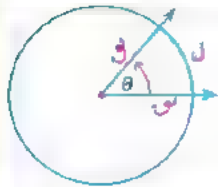
وهذا المقدار الثابت هو القياس الدائري للزاوية.  
القياس الدائري لزاوية مركزية في دائرة =  $\frac{\text{طول القوس الذي تحصره هذه الزاوية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$   
ويرمز لها بالرمز ( $\theta$ )

#### المصطلحات الأساسية

- Degree Measure قياس ستيني
- Radian Measure قياس دائري
- Radian Angle زاوية نصف قطرية

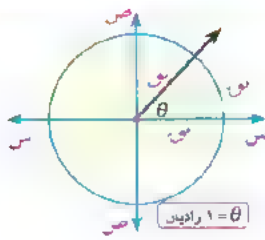
#### الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية.



عبره  
إذا كان  $\theta$  هو قياس الزاوية المركزية لدائرة طول نصف قطرها هو  $r$  تقابل قوسًا من الدائرة طوله  $l$  فإن:  $\theta = \frac{l}{r}$  من الزاوية نصف قطرية

$$\text{من التعريف نستنتج أن: } l = \theta \times r, \quad \theta = \frac{l}{r}$$



ووحدة قياس الزاوية في القياس الدائري هي الزاوية النصف قطرية، ويرمز لها بالرمز (°) ويقرأ واحد دائري (راديان).

### الزاوية النصف قطرية Radian angle

هي الزاوية المركزية في الدائرة التي تحصر قوسًا طوله يساوي طول نصف قطر هذه الدائرة.

تعريف

**نعكس باق:** هل القياس الدائري لزاوية مركزية يتناسب مع طول القوس المقابل لها؟ فسر إجابتك.

### مثال

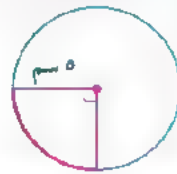
١١) دائرة طول نصف قطرها ٨ سم أوجد لأقرب رقمين عشريين طول القوس إذا كان قياس الزاوية المركزية التي تقابله يساوي  $\frac{\pi}{12}$

الحل

ستجده صيغة طول القوس  $l = r \times \theta$    
 بالتعويض عن  $r = 8$  سم  $\theta = \frac{\pi}{12}$  فيكون  $l = 8 \times \frac{\pi}{12} = 2.09$  سم

حاول أن تحل

١) أوجد طول القوس الذي يحصر الزاوية المعلومة في كل من الدوائر الآتية مقربًا الناتج لأقرب جزء من عشرة.



### العلاقة بين القياس الستيني والقياس الدائري لزاوية

Relation between degree measure and radian measure of an angle

نعم! أن قياس الزاوية المركزية لدائرة يساوي قياس قوسها.

أي أن: الزاوية المركزية التي قياسها الستيني ٣٦٠° يكون طول قوسها  $2\pi$  سم.

### وفي دائرة الوحدة

فإن:  $2\pi$  (راديان) بالتقدير الدائري يكافئ ٣٦٠° بالتقدير الستيني.

أي أن:  $\pi$  (راديان) يكافئ ١٨٠°  $1^\circ = \frac{\pi}{180}$  (راديان)  $1^\circ \approx \frac{1}{57.3}$  راديان

إذا كان لدينا زاوية قياسها الدائري  $\theta$  وقياسها الستيني  $\theta^\circ$  فإن:

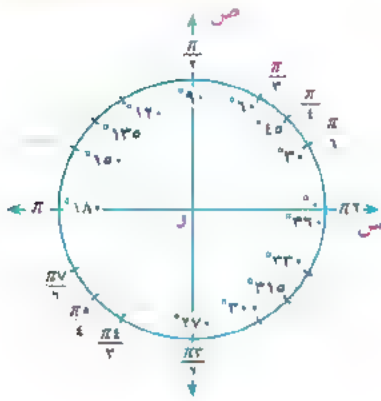
$$\frac{\theta^\circ}{180} = \frac{\theta}{\pi}$$



يوجد وحدة أخرى لقياس الزاوية وهي الجراد (Grad) وتساوي  $\frac{1}{400}$  من قياس الزاوية المستقيمة.

إذا كانت  $\theta$  ص هي قياسات ثلاث زوايا على التوالي بوحدات الدرجة، والرايدان، والجراد فإن

$$\frac{\theta}{400} = \frac{\theta}{\pi} = \frac{\theta}{180}$$



مثال

١٢ حول  $30^\circ$  إلى قياس دائري بدلالة  $\pi$ .

الحل

$$\frac{\theta}{\pi} = \frac{\theta}{180}$$

للتحويل إلى راديان نستخدم الصورة

$$\frac{\pi}{1} = \frac{\pi \times 30}{180} = \theta$$

حاول أن تحل

٢ الشكل المقابل يمثل قياسات بعض الزوايا الخاصة أحدها كُتب بالرايدان (خارج الدائرة) والآخر كُتب بالدرجات (داخل الدائرة). اكتب قياسات زوايا الشكل المقابلة أمام كل قياس زاوية مناظرة لها.

مثال

١٢ حول قياس الزاوية  $1,2^\circ$  إلى قياس ستيني.

الحل

$$\frac{180 \times 1,2}{\pi} = \theta$$

$$\theta = 68,754930542 = 68,75$$

وتستخدم الآلة الحاسبة على النحو التالي:



حاول أن تحل

٢ حول قياسات الزوايا التالية إلى قياس ستيني مقرباً الناتج لأقرب ثانية:

$$1,05^\circ$$

$$2,05^\circ$$

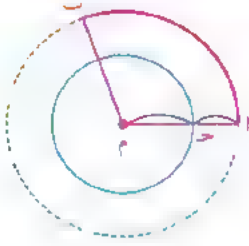
$$3,6^\circ$$

$$1,7^\circ$$



١٤ **الربط بالفضاء:** قمر صناعي يدور حول الأرض في مسار دائري دورة كاملة كل ٣ ساعات، إذا كان طول نصف قطر الأرض يبلغ تقريباً ٦٤٠٠ كم وبعد القمر عن سطح الأرض ٣٦٠٠ كم. فأوجد المسافة التي يقطعها القمر خلال ساعة واحدة مقرباً الناتج لأقرب كيلومتر.

مثال



الحل

يبين الشكل المقابل المسار الدائري لحركة القمر:

∴ طول نصف قطر دائرة مسار القمر  $m = 1 \text{ ج} + 3 \text{ ج} = 4 \text{ ج}$

∴  $m = 1 = 3600 + 6400 = 10000 \text{ كم}$

∴ القمر يقطع المسار الدائري (دورة كاملة) في 3 ساعات، وهذا يقابل زاوية مركزية  $\pi/2$

∴ القمر يقطع قوساً طوله  $\frac{1}{4}$  محيط الدائرة في الساعة الواحدة، وهذا يقابل زاوية مركزية  $\frac{\pi/2}{4}$

نستخدم صيغة طول القوس:

$$l = \theta \times r$$

بالتعويض عن  $r = 10000 \text{ كم}$ ،  $\theta = \frac{\pi/2}{4}$ ،  $l = 10000 \times \frac{\pi/2}{4}$

$$l \approx 20944 \text{ كم}$$

١٥. ألعاب رياضية: يدور أحد لاعبي الجمباز على جهاز الألعاب بزوايا قياسها  $200^\circ$ . ارسم هذه الزاوية في الوضع القياسي وأوجد قياسها بالتقدير الدائري.

الحل

ارسم محورين لإنشاء مستوى إحداثي متعامد ومتقاطعين في النقطة و.

بفرض أن اللاعب يدور بزوايا موجهة أ ب حيث:

$\angle (أ ب) = (\overrightarrow{أ}, \overrightarrow{ب})$  فيكون  $\angle (أ ب) = 200^\circ$ .

$$180^\circ < 200^\circ < 270^\circ$$

∴ الضلع النهائي للزاوية يقع في الربع الثالث.

$$200^\circ \approx \frac{\pi \times 200}{180} = 3.49$$

حاول أن تحل

٤. **الرابط باللاعب الرياضي:** لاعب اسكواش تحرك في مسار على شكل قوس طول نصف قطره ١,٤

متر وزاوية دوران اللاعب  $80^\circ$  أوجد لأقرب جزء من عشرة طول هذا القوس.



١. **الصناعة:** يدور قرص آلة بزوايا قياسها  $314^\circ$  ارسم هذه الزاوية في الوضع القياسي.

## تمارين ٤ - ٢

**أولاً: اختيار من متعدد:**

- ١) الزاوية التي قياسها  $60^\circ$  في الوضع القياسي تكافئ الزاوية التي قياسها:
 

أ  $120^\circ$       ب  $240^\circ$       ج  $300^\circ$       د  $420^\circ$
- ٢) الزاوية التي قياسها  $\frac{7\pi}{4}$  تقع في الربع:
 

أ الأول      ب الثاني      ج الثالث      د الرابع
- ٣) الزاوية التي قياسها  $\frac{9\pi}{4}$  تقع في الربع:
 

أ الأول      ب الثاني      ج الثالث      د الرابع
- ٤) إذا كان مجموع قياسات زوايا أي مضلع منتظم تساوي  $180^\circ$  (ن - ٢) حيث ن عدد الأضلاع، فإن قياس زاوية الخمس المنتظم بالقياس الدائري تساوي:
 

أ  $\frac{\pi}{3}$       ب  $\frac{7\pi}{3}$       ج  $\frac{2\pi}{3}$       د  $\frac{7\pi}{2}$
- ٥) الزاوية التي قياسها  $\frac{7\pi}{3}$  قياسها الستيني يساوي:
 

أ  $105^\circ$       ب  $210^\circ$       ج  $420^\circ$       د  $840^\circ$
- ٦) إذا كان القياس الستيني لزاوية هو  $48^\circ$  فإن قياسها الدائري يساوي:
 

أ  $0,18^\circ$       ب  $0,36^\circ$       ج  $0,18\pi$       د  $0,36\pi$
- ٧) طول القوس في دائرة طول قطرها ٢٤ سم ويقابل زاوية مركزية قياسها  $30^\circ$  يساوي:
 

أ  $2\pi$  سم      ب  $3\pi$  سم      ج  $4\pi$  سم      د  $5\pi$  سم
- ٨) القوس الذي طوله  $2\pi$  سم في دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم يقابل زاوية مركزية قياسها يساوي:
 

أ  $30^\circ$       ب  $60^\circ$       ج  $90^\circ$       د  $180^\circ$
- ٩) إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث  $75^\circ$  وقياس زاوية أخرى فيه  $\frac{\pi}{4}$  فإن القياس الدائري للزاوية الثالثة يساوي:
 

أ  $\frac{\pi}{4}$       ب  $\frac{\pi}{4}$       ج  $\frac{\pi}{3}$       د  $\frac{5\pi}{12}$



**ثانياً، أجب عن الأسئلة الآتية:**

١٠) أوجد بدلالة  $\pi$  القياس الدائري للزوايا التي قياساتها كالآتي:

أ $225^\circ$	ب $240^\circ$
ج $135^\circ$	د $300^\circ$
هـ $390^\circ$	و $780^\circ$

١١) أوجد القياس الدائري للزوايا التي قياساتها كالآتي، مقرباً الناتج لثلاثة أرقام عشرية:

أ $56,6^\circ$	ب $25,18^\circ$	ج $48,50,160^\circ$
----------------	-----------------	---------------------

١٢) أوجد القياس الستيني للزوايا التي قياساتها كالآتي، مقرباً الناتج لأقرب ثانية.

أ $49,4^\circ$	ب $2,27^\circ$	ج $3,1^\circ$
----------------	----------------	---------------

١٣) إذا كان  $\theta$  قياس زاوية مركزية في دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم وتحصر قوساً طوله ل:

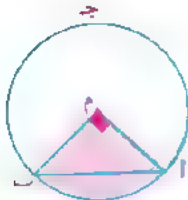
- أ إذا كان  $\theta = 20^\circ$  سم،  $\theta = 20^\circ$  سم،  $\theta = 78^\circ$  سم،  $\theta = 10^\circ$  سم (لأقرب جزء من عشرة)
- ب إذا كان  $\theta = 27,3^\circ$  سم،  $\theta = 78^\circ$  سم،  $\theta = 24^\circ$  سم،  $\theta = 78^\circ$  سم (لأقرب جزء من عشرة)

١٤) زاوية مركزية قياسها  $150^\circ$  وتحصر قوساً طوله ١١ سم، احسب طول نصف قطر دائرتها (لأقرب جزء من عشرة)

١٥) أوجد القياس الدائري والقياس الستيني للزاوية المركزية التي تقابل قوساً طوله ٨,٧ سم في دائرة طول نصف قطرها ٤ سم.

١٦) **الربط بالهندسة:** مثلث قياس إحدى زواياه  $60^\circ$  وقياس زاوية أخرى منه يساوي  $\frac{\pi}{4}$  أوجد القياس الدائري والقياس الستيني لزاويته الثالثة.

١٧) **الربط بالهندسة:** دائرة طول نصف قطرها ٤ سم، رسمت  $\triangle$  أ ب ج المحيطية التي قياسها  $30^\circ$  أوجد طول القوس الأصغر  $\widehat{أ ب}$

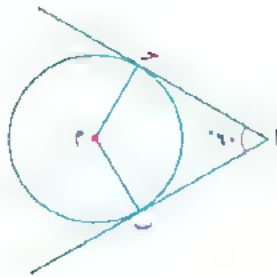


١٨) **الربط بالهندسة:** في الشكل المقابل إذا كان مساحة المثلث م أ ب القائم الزاوية في م = ٣٣ سم<sup>٢</sup> فأوجد محيط الشكل المظلل مقرباً الناتج لأقرب رقمين عشريين

١٩) **الربط بالهندسة:**  $\overline{AB}$  قطر في دائرة طوله ٢٤ سم ، رسم الوتر  $\overline{AC}$  بحيث كان  $\angle C = ٥٠^\circ$  أوجد طول القوس الأصغر  $\widehat{AC}$  مقرباً الناتج لأقرب رقمين عشريين.

٢٠) **مساهمات:** كم المسافة التي تقطعها نقطة على طرف عقرب الدقائق خلال ١٠ دقائق إذا كان طول هذا العقرب ٦ سم؟

٢١) **فلك:** قمر صناعي يدور حول الأرض في مسار دائري دورة كاملة كل ٦ ساعات، فإذا كان طول نصف قطر مساره عن مركز الأرض ٩٠٠٠ كم، فأوجد سرعته بالكيلومتر في الساعة.



٢٢) **الربط بالهندسة:** في الشكل المقابل:

$\overline{AB}$ ،  $\overline{AC}$  مماسان للدائرة م، و  $\angle A = 60^\circ$ ،  $AB = ١٢$  سم. أوجد لأقرب عدد صحيح طول القوس الأكبر  $\widehat{BC}$ .



٢٣) **الربط بالزمن:** تستخدم المزولة الشمسية لتحديد الوقت أثناء النهار من

خلال طول الظل الذي يسقط على سطح مدرج لإظهار الساعة وأجزائها، فإذا كان الظل يدور على القرص بمعدل  $١٥^\circ$  لكل ساعة.

أ أوجد قياس الزاوية بالراديان التي يدور الظل عنها بعد مرور ٤ ساعات.

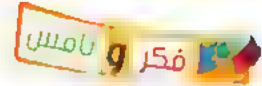
ب بعد كم ساعة يدور الظل بزاوية قياسها  $\frac{2\pi}{3}$  راديان؟

ج مزولة طول نصف قطرها ٢٤ سم، أوجد بدلالة  $\pi$  طول القوس الذي يصنعه دوران الظل على حافة القرص بعد مرور ١٠ ساعات.

٢٤) **تفكير ناقد:** مستقيم يصنع زاوية قياسها  $\frac{\pi}{3}$  في الوضع القياسي لدائرة الوحدة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. أوجد معادلة هذا المستقيم.

## سوف تتعلم

- دائرة الوحدة.
- الدوال المثلثية الأساسية
- معلوبات الدوال المثلثية الأساسية.
- إشارات الدوال المثلثية.
- الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة.



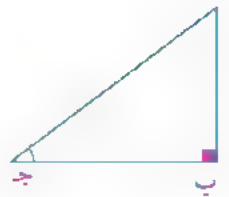
سبق أن درست النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة.

وفي  $\Delta$  أ ب ج القائم الزاوية في ب نجد:

$$\text{جا ج} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}}$$

$$\text{جتا ج} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}}$$

$$\text{ظا ج} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب ج}}$$

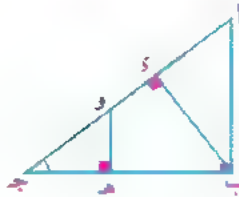


١- في الشكل المقابل عبر عن

جا ج بثلاث نسب مختلفة.

★ هل تساوي هذه النسب؟ فسر إجابتك.

★ ماذا تستنتج؟



## المصطلحات الأساسية

Trigonometric Function	دالة مثلثية
Sine	جيب
Cosine	جيب تمام
Tangent	ظل
Cosecant	قاطع تمام
Secant	قاطع
Cotangent	ظل تمام

## للحظ أنه:

المثلثات ب أ ج ، هـ و ج ، ك ب ج متشابهة (لماذا)؟

ومن التشابه يكون:  $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ ج}} = \frac{\text{هـ و}}{\text{و ج}} = \frac{\text{ك ب}}{\text{ب ج}} = \text{جا ج}$  لماذا؟

أي أن: النسبة المثلثية للزاوية الحادة نسبة ثابتة لا تتغير إلا إذا تغيرت الزاوية نفسها.

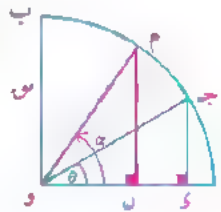
٢- يبين الشكل المقابل ربع دائرة طول نصف قطرها هو سم

حيث:  $\theta = (\angle \text{و ج})$

$$\text{جا } \theta = \frac{\text{ج}}{\text{و}}$$

وعندما يزداد  $\theta$  ( $\angle \text{و ج}$ ) إلى  $\alpha$

$$\text{فإن جا } \alpha = \frac{\text{م}}{\text{و}}$$



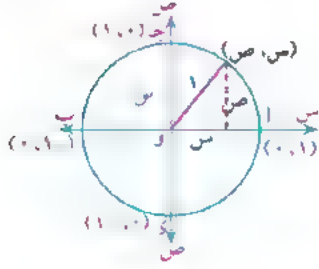
أي أن النسبة المثلثية لزاوية تتغير بتغير قياس زاويتها،

وهذا ما يعرف بالدوال المثلثية.

## الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية.

## The unit circle



في أى نظام إحداثي متعامد تسمى الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها يساوى وحدة الأطوال بدائرة الوحدة.

★ دائرة الوحدة تقطع محور السينات في النقطتين  $(1,0)$  و  $(-1,0)$ ، وتقطع محور الصادات في النقطتين  $(0,1)$  و  $(0,-1)$ .

★ إذا كان  $(s, c)$  هما إحداثيا أى نقطة على دائرة الوحدة فإن:

$$s \in [-1, 1], \quad c \in [-1, 1].$$

$$\text{حيث } s^2 + c^2 = 1 \quad \text{نظرية فيثاغورث}$$

## The basic trigonometric functions of an angle

## الدوال المثلثية الأساسية للزاوية

لأى زاوية موجهة في الوضع القياسي وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة  $(s, c)$  وقياسها  $\theta$  يمكن تعريف الدوال الآتية:

١- جيب تمام الزاوية  $\theta$  = الإحداثي السيني للنقطة ب

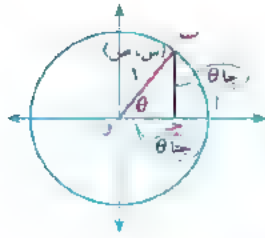
$$\text{أى أن } \cos \theta = s$$

٢- جيب الزاوية  $\theta$  = الإحداثي الصادي للنقطة ب

$$\text{أى أن } \sin \theta = c$$

٣- ظل الزاوية  $\theta$  =  $\frac{\text{الإحداثي الصادي للنقطة ب}}{\text{الإحداثي السيني للنقطة ب}}$

$$\text{أى أن: } \tan \theta = \frac{c}{s} \quad \text{حيث } s \neq 0, \quad \cot \theta = \frac{s}{c} \quad \text{حيث } c \neq 0.$$



**لاحظ أن:** يكتب الزوج المرتب  $(s, c)$  لأى نقطة على دائرة الوحدة بالصورة  $(\cos \theta, \sin \theta)$

إذا كانت النقطة  $(\frac{2}{3}, \frac{4}{5})$  هي نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة قياسها  $\theta$  مع دائرة الوحدة

$$\text{فإن: } \cos \theta = \frac{2}{3}, \quad \sin \theta = \frac{4}{5}, \quad \tan \theta = \frac{4}{3}$$

## The reciprocals of the basic trigonometric functions

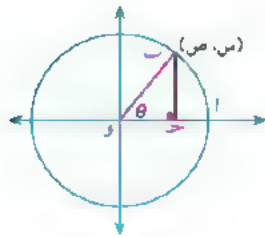
## مقلوبات الدوال الأساسية

لأى زاوية موجهة في الوضع القياسي وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة  $(s, c)$  وقياسها  $\theta$  توجد الدوال الآتية:

١- قاطع الزاوية  $\theta$ :  $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{s}$  حيث  $s \neq 0$

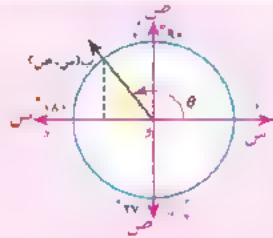
٢- قاطع تمام الزاوية  $\theta$ :  $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{c}$  حيث  $c \neq 0$

٣- ظل تمام الزاوية  $\theta$ :  $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{s}{c}$  حيث  $c \neq 0$



## The signs of The Trigonometric Functions

## إشارات الدوال المثلثية

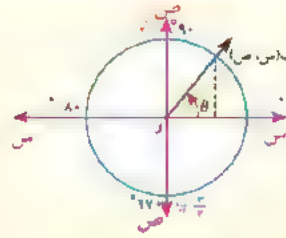


الربع الثاني

sin &gt; 0

cos &lt; 0

الضلع النهائي يقع في الربع الثاني  
لذلك دالة الجيب ومقلوبها تكونان موجبتين وباقي  
الدوال سالبة.

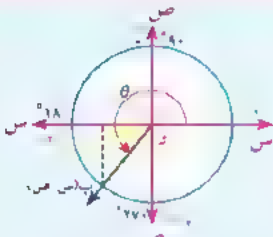


الربع الأول

sin &gt; 0

cos &gt; 0

الضلع النهائي للزاوية يقع في الربع الأول.  
لذلك كل الدوال المثلثية للزاوية التي ضلعها النهائي  
و ب تكون موجبة

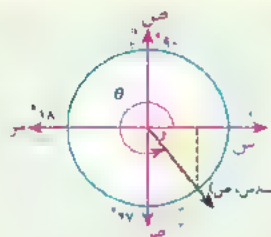


الربع الثالث

sin &lt; 0

cos &lt; 0

الضلع النهائي للزاوية يقع في الربع الثالث  
لذلك دالة الظل ومقلوبها تكونان موجبتين، وباقي  
الدوال سالبة.



الربع الرابع

sin &lt; 0

cos &gt; 0

الضلع النهائي للزاوية يقع في الربع الرابع  
لذلك دالة جيب تمام ومقلوبها تكونان موجبتين،  
وباقى الدوال سالبة.

ويمكن تلخيص إشارات الدوال المثلثية جميعها في الجدول الآتي:



الربع الذي يقع فيه الضلع النهائي للزاوية	الفترة التي يقع فيها قياس الزاوية	إشارات الدوال المثلثية		
		جنا، قتا	قا، ظنا	ظنا، قتا
الأول	$]-\frac{\pi}{2}, 0[$	+	+	+
الثاني	$]\pi, \frac{\pi}{2}[$	-	-	+
الثالث	$]\frac{\pi}{2}, \pi[$	+	-	-
الرابع	$]\pi, \frac{3\pi}{2}[$	-	+	-

## مثال

١ عین إشارة كل من النسب المثلثية الآتية:

أ جا ١٣٠° ب ظا ٣١٥° ج جتا ٦٥° د قا (-٣٠°)

## الحل

الزاوية التي قياسها ١٣٠° تقع في الربع الثاني ∴ جا ١٣٠° موجبة

- ب الزاوية التي قياسها  $315^\circ$  تقع في الربع الرابع  
 ج الزاوية التي قياسها  $60^\circ$  تكافئ زاوية قياسها  $60^\circ - 360^\circ = 290^\circ$   
 د الزاوية التي قياسها  $60^\circ$  تقع في الربع الرابع  
 ه الزاوية التي قياسها  $(-30^\circ)$  تكافئ زاوية قياسها  $30^\circ - 360^\circ = 330^\circ$   
 و الزاوية التي قياسها  $(-30^\circ)$  تقع في الربع الرابع  
 ز ظا  $315^\circ$  سالبة  
 ح جتا  $60^\circ$  موجبة  
 ط جتا  $315^\circ$  موجبة

حاول أن تحل

١ عین إشارة كل من النسب المثلثية الآتية:

- أ جتا  $210^\circ$  ب جا  $740^\circ$  ج ظا  $300^\circ$  د جا  $1230^\circ$

مثال

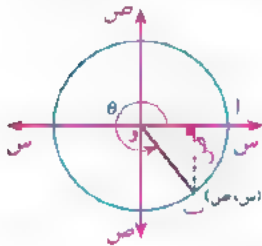
- ٢ إذا كانت  $\angle$  أوب في وضعها القياسي وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب وقياسها  $\theta$ .  
 أوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية أوب إذا كان إحداثيا النقطة ب هي:  
 أ  $(1, 0)$  ب  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  ج  $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$  د  $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$   
 حيث  $\sin < 0$  ،  $\cos < 0$

الحل

أ جتا  $\theta = 0$  ، جا  $\theta = 1$  ، ظا  $\theta = \frac{1}{0}$  (غير معرف)  
 ب  $\sin^2 + \cos^2 = 1$  ، بالتعويض عن  $\sin = \frac{1}{\sqrt{2}}$   
 $1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \cos^2$  فيكون  
 $\cos^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  ،  $\cos = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$   
 $\therefore \cos = \frac{1}{\sqrt{2}}$  (مرفوض) ،  $\therefore \cos = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  (مرفوض)  
 ج جتا  $\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ، جا  $\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ، ظا  $\theta = 1$   
 د  $\sin^2 + \cos^2 = 1$  ،  $\sin = \frac{1}{2}$  ،  $\cos = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  لأن  $\sin < 0$   
 $\therefore \sin = -\frac{1}{2}$  ،  $\cos = -\frac{\sqrt{3}}{2}$   
 ويكون: جتا  $\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  ، جا  $\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  ، ظا  $\theta = 1$

- ٣ إذا كانت  $270^\circ < \theta < 360^\circ$  وكان جا  $\theta = -\frac{12}{13}$  أوجد جميع النسب المثلثية الأساسية للزاوية التي قياسها  $\theta$

الحل



نفرض أن  $\angle$  أوب حيث  $\theta$  في الربع الرابع

وأن إحداثي النقطة ب هما  $(\cos, \sin)$

$\therefore \sin = \text{جا } \theta = -\frac{12}{13}$  ،  $\cos = \text{جتا } \theta$  حيث جتا  $\theta < 0$

$\sin^2 + \cos^2 = 1$  ،  $\therefore \text{جتا } \theta = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2}$

$\therefore \text{جتا } \theta = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$  ،  $\therefore \text{جتا } \theta = \frac{144}{169}$  أو جتا  $\theta = -\frac{12}{13}$

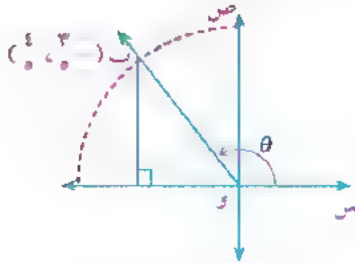
$$\text{جتا } \theta = \frac{12}{13} \text{ (لماذا؟) } \quad \text{طا } \theta = \frac{5}{13}$$

حاول أن تحل

(٢) إذا كانت  $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ، جا  $\theta = \frac{4}{5}$  أوجد جتا  $\theta$ ، طا  $\theta$  حيث  $\theta$  زاوية في وضعها القياسي في دائرة الوحدة.

مثال

(٤) إذا كانت الزاوية التي قياسها  $\theta$  والمرسومة في الوضع القياسي، و ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب  $(-\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$ ، فأوجد جميع النسب المثلثية للزاوية  $\theta$ .



احل

$$\text{جا } \theta = \frac{3}{5} \quad \text{جتا } \theta = -\frac{2}{5} \quad \text{طا } \theta = -\frac{4}{5}$$

$$\text{قنا } \theta = \frac{4}{3} \quad \text{قا } \theta = -\frac{5}{2} \quad \text{ظنا } \theta = -\frac{5}{4}$$

حاول أن تحل

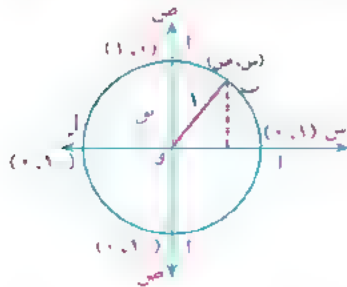
(٢) أوجد جميع النسب المثلثية للزاوية التي قياسها  $\theta$  المرسومة في الوضع القياسي، و ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب حيث:

$$\text{ج ب } (-\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$$

$$\text{ب ب } (-\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$$

$$\text{أ ب } (\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$$

الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة The trigonometric functions of some special angles



في الشكل المقابل: قطعت دائرة الوحدة محوري الإحداثيات في النقاط  $(1,0)$ ،  $(0,1)$ ،  $(-1,0)$ ،  $(0,-1)$ .

وكانت  $\theta$  قياس الزاوية الموجهة أ و ب في وضعها القياسي، والذي يقطع ضلعها النهائي  $\overline{وب}$  دائرة الوحدة في ب.

أولاً: إذا كانت  $\theta = 0^\circ$  أو  $\theta = 360^\circ$  فإن: ب  $(1,0)$

ويكون: جتا  $0^\circ = \text{جتا } 360^\circ = 1$ ، جا  $0^\circ = \text{جتا } 360^\circ = \text{صفر}$ ،

$$\text{ظا } 0^\circ = \text{ظا } 360^\circ = \text{صفر}$$

ثانياً: إذا كانت  $\theta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$  فإن: ب  $(0,1)$

$$\text{جتا } 90^\circ = \text{صفر} \quad \text{جا } 90^\circ = 1 \quad \text{ظا } 90^\circ = \frac{1}{0} \quad (\text{غير معرف})$$

ثالثاً: إذا كانت  $\theta = 180^\circ = \pi$  فإن: ب  $(-1,0)$

$$\text{جتا } 180^\circ = -1 \quad \text{جا } 180^\circ = \text{صفر} \quad \text{ظا } 180^\circ = \text{صفر}$$



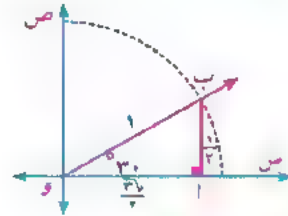
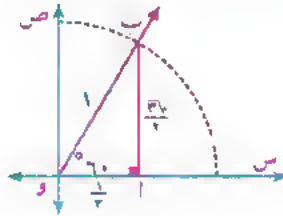
رابعًا إذا كانت  $\theta = 270^\circ = \frac{3\pi}{2}$

فلن. ب (١-٠٠)

جنا  $270^\circ = 0$  ، جنا  $270^\circ = 1$  ، جنا  $270^\circ = 1$  صفر (غير معرف)

حاول أن تحل

٤ في الأشكال التالية حدد إحداثي النقطة ب لكر شكر واستنتج الدوال المثلثية لقياسات الزوايا  $20^\circ$ ،  $60^\circ$ ،  $45^\circ$



مثال

٥ أثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة أن: جنا  $60^\circ$  جنا  $30^\circ$  - جنا  $60^\circ$  جنا  $30^\circ$  جنا  $\frac{\pi}{4}$

الحل

نعلم أن جنا  $30^\circ = \frac{1}{2}$  ، جنا  $60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ، جنا  $60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ، جنا  $30^\circ = \frac{1}{2}$  ، جنا  $60^\circ = \frac{1}{2}$

١) الطرف الأيمن  $= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}$  ، الطرف الأيسر  $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

٢)  $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$  ، جنا  $45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

الطرف الأيسر = جنا  $\frac{\pi}{4}$  = جنا  $45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

من (١)، (٢) : الطرفان متساويان.

حاول أن تحل

٥ أوجد قيمة: جنا  $30^\circ$  جنا  $60^\circ$  - جنا  $60^\circ$  جنا  $30^\circ$  جنا  $45^\circ$

٦ تفكير ناقد: إذا كانت الزاوية التي قياسها  $\theta$  مرسومة في الوضع القياسي، وكان جنا  $\theta = \frac{1}{2}$  ، جنا  $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

هل من الممكن أن يكون  $\theta = 240^\circ$  وضح ذلك.

٤

أثبت صحة كل من المتساويات التالية.

أ  $1 - 2 \text{ جنا } 90^\circ = \text{جنا } 180^\circ$  ب جنا  $\frac{\pi}{4} = \text{جنا } \frac{\pi}{2} - \text{جنا } \frac{\pi}{4}$



## تمارين ٣-٤



أولاً: الاختيار من متعدد:

١. إذا كان  $\theta$  قياس زاوية في الوضع القياسي و ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة  $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$  فإن جا  $\theta$  تساوي:

- أ  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  ب  $\frac{1}{2}$  ج  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  د  $\frac{2}{\sqrt{3}}$

٢. إذا كانت جا  $\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$  حيث  $\theta$  زاوية حادة فإن  $\theta$  تساوي

- أ  $30^\circ$  ب  $45^\circ$  ج  $60^\circ$  د  $90^\circ$

٣. إذا كانت جا  $\theta = 1$ ، جتا  $\theta = 0$  فإن  $\theta$  تساوي

- أ  $\frac{\pi}{4}$  ب  $\pi$  ج  $\frac{\pi}{2}$  د  $2\pi$

٤. إذا كانت قتا  $\theta = 2$  حيث  $\theta$  قياس زاوية حادة فإن  $\theta$  تساوي

- أ  $10^\circ$  ب  $30^\circ$  ج  $45^\circ$  د  $60^\circ$

٥. إذا كانت جتا  $\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ، جا  $\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  فإن  $\theta$  تساوي

- أ  $\frac{\pi}{3}$  ب  $\frac{\pi}{4}$  ج  $\frac{\pi}{2}$  د  $\frac{\pi}{6}$

٦. إذا كانت ظا  $\theta = 1$  حيث  $\theta$  زاوية حادة موجبة فإن  $\theta$  تساوي

- أ  $10^\circ$  ب  $30^\circ$  ج  $45^\circ$  د  $60^\circ$

٧. ظا  $45^\circ +$  ظلنا  $45^\circ -$  قا  $60^\circ$  تساوي

- أ صفراً ب  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  ج  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  د ١

٨. إذا كانت جتا  $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$  حيث  $\theta$  قياس زاوية حادة فإن جا  $\theta$  تساوي

- أ  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  ب  $\frac{1}{2}$  ج  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  د  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

٩. أوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية قياسها  $\theta$  المرسومة في الوضع القياسي، وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة

- أ  $(\frac{5}{3}, \frac{2}{3})$  ب  $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$  ج  $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  د  $(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$

١٠) إذا كان  $\theta$  هو قياس زاوية موجهة في الوضع القياسي، وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة المعطاه فأوجد جميع الدوال المثلثية لهذه الزاوية في الحالات الآتية:

أ (١٣، ١٤) حيث  $0 < \theta$

ب (١٢، ١٣) حيث  $\frac{\pi}{2} > \theta > \pi$

١١) اكتب إشارات النسب المثلثية الآتية:

أ جا  $240^\circ$

ب ظا  $360^\circ$

ج قتا  $410^\circ$

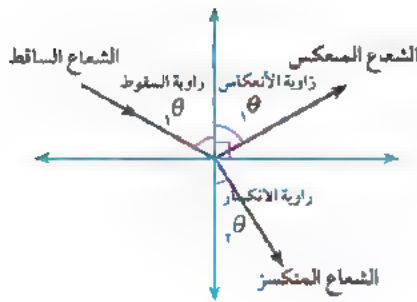
د ظا  $\frac{\pi}{4}$

هـ قتا  $\frac{\pi}{4}$

١٢) أوجد قيمة ما يأتي:

أ جتا  $\frac{\pi}{4} \times$  جتا  $0 +$  جا  $\frac{\pi}{2} \times$  جا  $\frac{\pi}{2}$

ب ظا  $30^\circ + 2 \text{ جا } 45^\circ + \text{جتا } 90^\circ$



١٣) **الربط بالفيزياء:** عند سقوط أشعة الضوء على سطح شبه شفاف، فإنها تنعكس بنفس زاوية السقوط ولكن البعض منها ينكسر عند مروره خلال هذا السطح. كما

في الشكل المجاور:

إذا كان جا  $\theta = \frac{1}{2}$ ، كانت  $\theta = 30^\circ$ ، كانت  $\theta = 60^\circ$ ، فأوجد قياس زاوية  $\theta$ .

١٤) **اكتشف الخطأ:** طلب المعلم من طلاب الفصل إيجاد ناتج  $2 \text{ جا } 45^\circ$ .

إجابة أحمد

$$2 \text{ جا } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 2 = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

إجابة كريم

$$2 \text{ جا } 45^\circ = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

أي الإجابتين صحيح؟ ولماذا؟

١٥) **تفكير ناقد:** إذا كانت  $\theta$  قياس زاوية مرسومة في الوضع القياسي، حيث ظتا  $\theta = -1$ ، قتا  $\theta = \frac{1}{2}$ ، هل من الممكن أن يكون  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ؟ فسر إجابتك.

## سوف نتعلم

- العلاقة بين الدوال المثلثية للزوايتين  $\theta$ ،  $\theta \pm 180^\circ$
- العلاقة بين الدوال المثلثية للزوايتين  $\theta$ ،  $\theta - 360^\circ$
- العلاقة بين الدوال المثلثية للزوايتين  $\theta$ ،  $\theta \pm 90^\circ$
- العلاقة بين الدوال المثلثية للزوايتين  $\theta$ ،  $\theta \pm 270^\circ$
- الحل العام للمعادلات المثلثية التي هي الصورة.

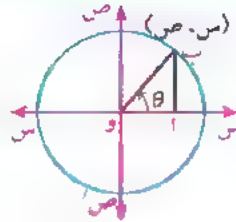
$$\bullet \text{ جتا } \alpha = \text{جتا } \beta$$

$$\bullet \text{ جتا } \alpha = \text{جتا } \beta$$

$$\bullet \text{ جتا } \alpha = \text{جتا } \beta$$

## المصطلحات الأساسية

زاويتان متسبتان Related Angles

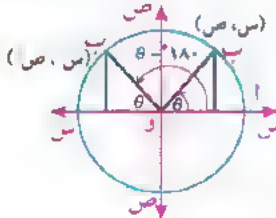


سبق أن درست الانعكاس وتعرفت على خواصه .  
يبين الشكل المقابل الزاوية الموجهة أوب في الوضع القياسي وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب(س، ص). قياسها  $\theta$  حيث  $0^\circ < \theta < 90^\circ$

عين النقطة ب/ صورة النقطة ب بالانعكاس حول محور الصادات، واذكر إحداثياتها.  
ما قياس  $\angle$  أوب؟ هل  $\angle$  أوب/ في الوضع القياسي؟

١- الدوال المثلثية لأي زاويتين قياسيهما  $\theta$ ،  $(\theta - 180^\circ)$ 

من الشكل المقابل ب (س، ص) صورة النقطة ب(س، ص) بالانعكاس حول محور الصادات فيكون س' = -س، ص' = -ص  
لذلك فإن:



$$\begin{aligned} \text{جتا } (\theta - 180^\circ) &= \text{جتا } \theta \\ \text{جتا } (\theta - 180^\circ) &= -\text{جتا } \theta \\ \text{جتا } (\theta - 180^\circ) &= -\text{جتا } \theta \\ \text{جتا } (\theta - 180^\circ) &= -\text{جتا } \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{مثلاً: جتا } 120^\circ &= \text{جتا } (120^\circ - 180^\circ) = \text{جتا } -60^\circ = -\text{جتا } 60^\circ \\ \text{جتا } 135^\circ &= \text{جتا } (135^\circ - 180^\circ) = \text{جتا } -45^\circ = -\text{جتا } 45^\circ \end{aligned}$$

## حاول أن تحل

$$\text{أوجد جتا } 135^\circ \text{ ، جتا } 120^\circ \text{ ، جتا } 150^\circ$$

$$\text{لاحظ أن: } 180^\circ = (\theta - 180^\circ) + \theta$$

يقال إن الزاويتين  $\theta$ ،  $\theta - 180^\circ$  زاويتان متسبتان.

## الأدوات والوسائل

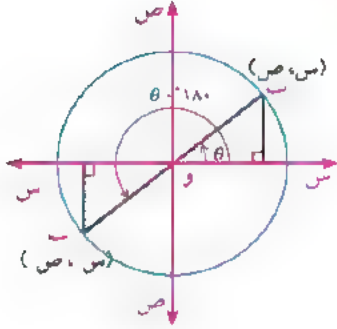
آلة حاسبة علمية

تعريف الزاويتان المتسبتان: هما زاويتان الفرق بين قياسيهما أو مجموع قياسيهما يساوي عددًا صحيح من القوائم.

## ٢- الدوال المثلثية لأي زاويتين قياسيهما $\theta$ ، $(\theta + ١٨٠)$

في الشكل المقابل نجد:

ب/س/، ص/ صورة النقطة ب(س، ص) بالانعكاس في نقطة الأصل و فيكون س/ = -س، ص/ = -ص  
لذلك فإن:



$$\begin{aligned} \text{حـا } (\theta + ١٨٠) &= -\text{حـا } \theta & \text{قـتا } (\theta + ١٨٠) &= -\text{قـتا } \theta \\ \text{جـتا } (\theta + ١٨٠) &= -\text{جـتا } \theta & \text{قـا } (\theta + ١٨٠) &= -\text{قـا } \theta \\ \text{ظـا } (\theta + ١٨٠) &= \text{ظـا } \theta & \text{ظـلتا } (\theta + ١٨٠) &= \text{ظـلتا } \theta \end{aligned}$$

مثلاً:

$$\begin{aligned} \text{جـا } ٢١٠^\circ &= -\text{جـا } ٣٠^\circ = -\frac{1}{2} \\ \text{جـتا } ٢٢٥^\circ &= -\text{جـتا } ٤٥^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{ظـا } ٢٤٠^\circ &= \text{ظـا } ٦٠^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

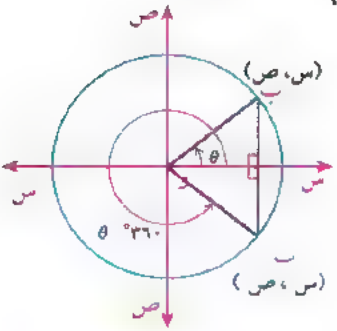
حاول أن تحل

⦿ أوجد جا ٢٢٥° ، جتا ٢١٠° ، قا ٦٠° ، ظا ٢٢٥°.

## ٣- الدوال المثلثية لأي زاويتين قياسيهما $\theta$ ، $(\theta - ٣٦٠)$

في الشكل المقابل:

ب/س/، ص/ صورة النقطة ب(س، ص)  
بالانعكاس حول محور السينات فيكون س/ = س، ص/ = -ص  
لذلك فإن:



$$\begin{aligned} \text{حـا } (\theta - ٣٦٠) &= \text{حـا } \theta & \text{قـتا } (\theta - ٣٦٠) &= -\text{قـتا } \theta \\ \text{جـتا } (\theta - ٣٦٠) &= \text{جـتا } \theta & \text{قـا } (\theta - ٣٦٠) &= -\text{قـا } \theta \\ \text{ظـا } (\theta - ٣٦٠) &= \text{ظـا } \theta & \text{ظـلتا } (\theta - ٣٦٠) &= -\text{ظـلتا } \theta \end{aligned}$$

مثلاً:

$$\begin{aligned} \text{جـا } ٣٣٠^\circ &= \text{جـا } ٣٠^\circ = \frac{1}{2} \\ \text{جـتا } ٣١٥^\circ &= \text{جـتا } ٤٥^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{ظـا } ٣٠^\circ &= -\text{ظـا } ٣٦٠^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

حاول أن تحل

⦿ أوجد: جا ٣١٥° ، قتا ٣١٥° ، ظا ٣٣٠° ، ظا ٣٠°.

تذكير ناقد: كيف يمكنك إيجاد جا (-٤٥°) ، جتا (-٦٠°) ، ظا (-٣٠°) ، جا ٦٩°.

لاحظ أن:

الدوال المثلثية للزاوية  $(\theta -)$   
هي نفسها الدوال المثلثية  
للزاوية  $(\theta - ٣٦٠)$

## مثال

١) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة المقدار

$$\text{جا } ١٥٠^\circ \text{ جتا } (٣٠٠^\circ) + \text{جتا } ٩٣٠^\circ \text{ ظنا } ٢٤٠^\circ$$

الحل

$$\begin{aligned} \text{جا } ١٥٠^\circ &= \text{جا } (٣٠^\circ - ١٨٠^\circ) = -\text{جا } ٣٠^\circ = -\frac{1}{2} \\ \text{جتا } (٣٠٠^\circ) &= \text{جتا } (-٣٦٠^\circ + ٣٠^\circ) = \text{جتا } ٣٦٠^\circ = ١ \\ \text{جتا } ٩٣٠^\circ &= \text{جتا } (٩٣٠^\circ - ٢ \times ٣٦٠^\circ) = \text{جتا } ٢١٠^\circ = -\frac{1}{2} \\ \text{وتكون جتا } ٢١٠^\circ &= \text{جتا } (٣٠^\circ + ١٨٠^\circ) = -\text{جتا } ٣٠^\circ = -\frac{1}{2} \\ \text{ظنا } ٢٤٠^\circ &= \text{ظنا } (٢٤٠^\circ - ١٨٠^\circ) = \text{ظنا } ٦٠^\circ = \frac{1}{2} \\ \text{المقدار} &= \frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2}) + ١ \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

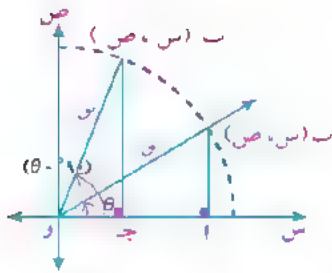
هذا حاول أنا نحل

٤) أثبت أن  $\text{جا } ٦٠^\circ \text{ جتا } (٣٠^\circ) + \text{جا } ١٥٠^\circ \text{ جتا } (٢٤٠^\circ) = ١$ ٤- الدوال المثلثية لأي زاويتين قياسيهما  $\theta$  ،  $(\theta - ٩٠^\circ)$ 

يبين الشكل المجاور جزءاً من دائرة مركزها و.

الزاوية التي قياسها  $\theta$  مرسومة في الوضع القياسي لدائرة طول نصف قطرها ١.

من تطابق المثلثين و أ ب ، و ج ب ؛

نجد أن:  $\text{س} = \text{ص} ، \text{س}' = \text{ص}'$ لذلك يمكن استنتاج جميع الدوال المثلثية للزاويتين  $\theta$  ،  $(\theta - ٩٠^\circ)$ 

$$\text{جا } (\theta - ٩٠^\circ) = \text{جتا } \theta ، \text{جتا } (\theta - ٩٠^\circ) = \text{قا } \theta$$

$$\text{جتا } (\theta - ٩٠^\circ) = \text{جا } \theta ، \text{قا } (\theta - ٩٠^\circ) = \text{جتا } \theta$$

$$\text{ظا } (\theta - ٩٠^\circ) = \text{ظنا } \theta ، \text{ظنا } (\theta - ٩٠^\circ) = \text{ظا } \theta$$

## مثال

١) إذا كانت الزاوية التي قياسها  $\theta$  في الوضع القياسي، ويمر ضلعها النهائي بالنقطة  $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ فأوجد الدوال المثلثية:  $\text{جا } (\theta - ٩٠^\circ) ، \text{ظنا } (\theta - ٩٠^\circ)$

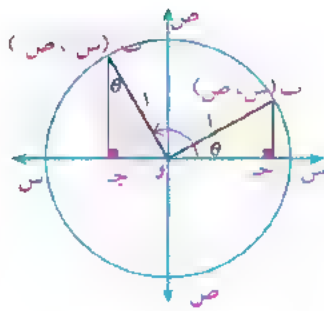
الحل

$$\begin{aligned} \therefore \text{جا } (\theta - 90^\circ) &= \text{جتا } \theta \\ \therefore \text{ظا } (\theta - 90^\circ) &= \text{ظا } \theta \\ \therefore \text{جتا } (\theta - 90^\circ) &= \frac{3}{5} \\ \therefore \text{ظا } (\theta - 90^\circ) &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

حاول أن تحل

٥) في المثال السابق أوجد جتا  $(\theta - 90^\circ)$  ، قتا  $(\theta - 90^\circ)$

٥- الدوال المثلثية لأي زاويتين قياسيهما  $\theta$  ،  $(\theta + 90^\circ)$



من تطابق المثلثين ب ج و ، وجد

نجد أن  $\text{ص} = \text{س}'$  ،  $\text{س} = -\text{ص}'$

ومن ذلك يمكن استنتاج جميع الدوال المثلثية للزاويتين  $\theta$  ،  $(\theta + 90^\circ)$  كالآتي:

$$\begin{aligned} \text{جا } (\theta + 90^\circ) &= \text{جتا } \theta ، \text{ قتا } (\theta + 90^\circ) = \text{قا } \theta \\ \text{جتا } (\theta + 90^\circ) &= -\text{جا } \theta ، \text{ قا } (\theta + 90^\circ) = -\text{قتا } \theta \\ \text{ظا } (\theta + 90^\circ) &= -\text{ظا } \theta ، \text{ ظتا } (\theta + 90^\circ) = \text{ظا } \theta \end{aligned}$$

مثال

٢) إذا كانت الزاوية التي قياسها  $\theta$  في الوضع القياسي يمر ضلعها النهائي بالنقطة  $(\frac{\sqrt{13}}{3}, \frac{1}{3})$  أوجد الدوال المثلثية ظا  $(\theta + 90^\circ)$  ، قتا  $(\theta + 90^\circ)$

الحل

$$\begin{aligned} \therefore \text{ظا } (\theta + 90^\circ) &= -\text{ظا } \theta \\ \therefore \text{قتا } (\theta + 90^\circ) &= \text{قا } \theta \\ \therefore \text{ظا } (\theta + 90^\circ) &= -\frac{1}{\frac{\sqrt{13}}{3}} = -\frac{3}{\sqrt{13}} \\ \therefore \text{قتا } (\theta + 90^\circ) &= \frac{3}{3} = 3 \end{aligned}$$

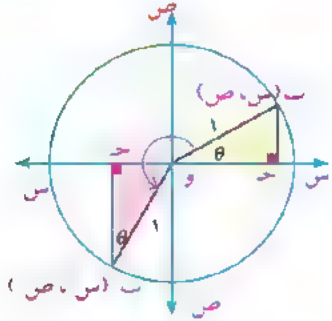
حاول أن تحل

٦) في المثال السابق أوجد: جتا  $(\theta + 90^\circ)$  ، قا  $(\theta + 90^\circ)$



٦- الدوال المثلثية لأى زوايتين قياسيهما  $\theta$  ،  $(\theta - 270^\circ)$ 

من تطابق المثلثين ب/ج/و ، و ج ب

لذلك يمكن استنتاج جميع الدوال المثلثية للزاويتين  $\theta$  ،  $(\theta - 270^\circ)$  كالآتي:

$$\text{جا } (\theta - 270^\circ) = -\text{جتا } \theta , \quad \text{قتا } (\theta - 270^\circ) = -\text{قا } \theta$$

$$\text{جتا } (\theta - 270^\circ) = \text{جا } \theta , \quad \text{قتا } (\theta - 270^\circ) = -\text{قا } \theta$$

$$\text{ظا } (\theta - 270^\circ) = \text{ظا } \theta , \quad \text{ظتا } (\theta - 270^\circ) = -\text{ظتا } \theta$$

مثال

٢) إذا كانت الزاوية التي قياسها  $\theta$  المرسومة في الوضع القياسي يمر ضلعها النهائي بالنقطة  $(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4})$  فأوجد الدوال المثلثية: جتا  $(\theta - 270^\circ)$  ، ظتا  $(\theta - 270^\circ)$

الحل

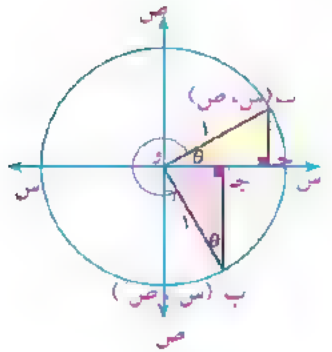
$$\therefore \text{جتا } (\theta - 270^\circ) = \text{جا } \theta \quad \therefore \text{جتا } (\theta - 270^\circ) = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{ظتا } (\theta - 270^\circ) = \text{ظا } \theta \quad \therefore \text{ظتا } (\theta - 270^\circ) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

حاول أن تحل

٧) في المثال السابق أوجد ظا  $(\theta - 270^\circ)$  ، قتا  $(\theta - 270^\circ)$ ٧- الدوال المثلثية لأى زوايتين قياسيهما  $\theta$  ،  $(\theta + 270^\circ)$ 

من تطابق المثلثين: ب/ج/و ، و ج ب

لذلك يمكن استنتاج جميع الدوال المثلثية للزاويتين  $\theta$  ،  $(\theta + 270^\circ)$  كالآتي:

$$\text{جا } (\theta + 270^\circ) = -\text{جتا } \theta , \quad \text{قتا } (\theta + 270^\circ) = -\text{قا } \theta$$

$$\text{جتا } (\theta + 270^\circ) = -\text{جا } \theta , \quad \text{قتا } (\theta + 270^\circ) = -\text{قا } \theta$$

$$\text{ظا } (\theta + 270^\circ) = -\text{ظتا } \theta , \quad \text{ظتا } (\theta + 270^\circ) = -\text{ظتا } \theta$$

مثال

٤) إذا كانت الزاوية التي قياسها  $\theta$  في الوضع القياسي يمر ضلعها النهائي بالنقطة  $(\frac{2}{3}, \frac{5\sqrt{2}}{3})$  فأوجد الدوال المثلثية: جتا  $(\theta + 270^\circ)$  ، قا  $(\theta + 270^\circ)$

الحل

$$\begin{aligned} \therefore \text{جا } (\theta + 270^\circ) &= -\text{جتا } \theta \\ \therefore \text{قا } (\theta + 270^\circ) &= \text{قتا } \theta \end{aligned}$$

حاول أن تحل

٨ في المثال السابق أوجد ظلنا  $(\theta + 270^\circ)$  ، قتنا  $(\theta + 270^\circ)$ .

الحل العام للمعادلات المثلثية التي على الصورة: (جا  $\alpha = \text{جتا } \beta$  ، قا  $\alpha = \text{قتا } \beta$  ، ظا  $\alpha = \text{ظتا } \beta$ )

General solution of trigonometric equations as the form  $[\tan(\alpha) = \cot(\beta), \sec(\alpha) = \csc(\beta), \sin(\alpha) = \cos(\beta)]$



سبق أن درست أنه إذا كان  $\alpha, \beta$  هما قياسا زاويتين متتامتين (أي مجموع قياسيهما  $90^\circ$ ) فإن جا  $\alpha = \text{جتا } \beta$  ، قا  $\alpha = \text{قتا } \beta$  ، ظا  $\alpha = \text{ظتا } \beta$  ومن ذلك فإن  $90^\circ = \beta + \alpha$  حيث  $\alpha, \beta$  زاويتان حادتان فإذا كانت جا  $\theta = \text{جتا } 90^\circ$  فما هي قيم زاوية  $\theta$  المتوقعة؟



١- إذا كان جا  $\alpha = \text{جتا } \beta$  (حيث  $\alpha, \beta$  قياسا زاويتين متتامتين) فإن:

$$\begin{aligned} \leftarrow \text{جا } \alpha &= \text{جا } \left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{ومن ذلك فإن: } \alpha = \beta + \frac{\pi}{2} \quad \text{أى} \quad \frac{\pi}{2} = \beta - \alpha \\ \leftarrow \text{جا } \alpha &= \text{جا } \left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{ومن ذلك فإن: } \alpha = \beta - \frac{\pi}{2} \quad \text{أى} \quad \frac{\pi}{2} = \beta - \alpha \end{aligned}$$

وبإضافة  $\pi n$  (حيث  $n \in \mathbb{Z}$ ) إلى الزاوية  $\frac{\pi}{2}$  فإن:

$$\text{عندما جا } \alpha = \text{جتا } \beta \quad \text{فإن } \alpha = \beta \pm \frac{\pi}{2} + \pi n \quad (\text{حيث } n \in \mathbb{Z}) \text{، بالمثل:}$$

$$\text{عندما قتا } \alpha = \text{قتا } \beta \quad \text{فإن } \alpha = \beta \pm \frac{\pi}{2} + \pi n \quad (\text{حيث } n \in \mathbb{Z})$$

$$\alpha \neq \pi n, \quad \beta \neq \frac{\pi}{2}(1 + 2n)$$

٢- إذا كان ظا  $\alpha = \text{ظتا } \beta$  (حيث  $\alpha, \beta$  قياسا زاويتين متتامتين) فإن:

$$\begin{aligned} \leftarrow \text{ظا } \alpha &= \text{ظا } \left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{ومن ذلك فإن: } \alpha = \beta - \frac{\pi}{2} \quad \text{أى} \quad \frac{\pi}{2} = \beta - \alpha \\ \leftarrow \text{ظا } \alpha &= \text{ظا } \left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{ومن ذلك فإن: } \alpha = \beta + \frac{\pi}{2} \quad \text{أى} \quad \frac{\pi}{2} = \beta - \alpha \end{aligned}$$

وبإضافة  $\pi n$  (حيث  $n \in \mathbb{Z}$ ) إلى الزاويتين  $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$  فإن:

$$\text{عندما ظا } \alpha = \text{ظتا } \beta \quad \text{فإن } \alpha = \beta + \frac{\pi}{2} + \pi n \quad (\text{حيث } n \in \mathbb{Z})$$

$$\alpha \neq \pi n, \quad \beta \neq \frac{\pi}{2}(1 + 2n)$$

## مثال

٥ حل المعادلة:  $\text{جا } 2\theta = \text{جتا } \theta$ 

الحل

المعادلة:  $\text{جا } 2\theta = \text{جتا } \theta$ 

$$\text{من تعريف المعادلة (ن } \exists \text{ ص)} \quad \pi 2 + \frac{\pi}{4} = \theta \pm \theta 2$$

$$(1) \text{ إما } \pi 2 + \frac{\pi}{4} = \theta + \theta 2 \quad \text{أى أن: } \pi 2 + \frac{\pi}{4} = \theta 2$$

$$\text{بقسمة الطرفين على } 3 \quad \pi \frac{2}{3} + \frac{\pi}{4} = \theta$$

$$(2) \text{ أو } \pi 2 + \frac{\pi}{4} = \theta - \theta 2 \quad \text{أى أن: } \pi 2 + \frac{\pi}{4} = \theta$$

$$\text{حل المعادلة هو: } \pi \frac{2}{3} + \frac{\pi}{4} \quad \text{أو} \quad \pi 2 + \frac{\pi}{4}$$

حاول أن تحل

٩ أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية:

$$* \text{ جتا } \theta = \text{جا } \theta$$

$$* \text{ جا } 2\theta = (\theta - \frac{\pi}{4})$$

$$! \text{ جا } 4\theta = \text{جتا } 2\theta$$

١٠. **كتشف** **لخطأ**: فى إحدى مسابقات الرياضيات طلب المعلم من كريم ورياد إيجاد قيمة  $\text{جا}(\theta - \frac{\pi}{4})$  فأيهما إجابته صحيحة؟ فسر ذلك.

إجابة زياد

$$\text{جا}(\theta - \frac{\pi}{4}) = \text{جا}[-(\theta - \frac{\pi}{4})]$$

$$= -\text{جا}(\theta - \frac{\pi}{4})$$

$$= -(-\text{جتا } \theta) = \text{جتا } \theta$$

إجابة كريم

$$\text{جا}(\theta - \frac{\pi}{4}) = \text{جا}(\frac{\pi}{4} - \theta + \pi 2)$$

$$= \text{جا}(\theta + \frac{\pi 2}{4})$$

$$= -\text{جتا } \theta$$

تحقق من مهمك

أوجد جميع قيم  $\theta$  حيث  $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$  والتي تحقق كل من المعادلات الآتية:

$$* \text{ جتا } 2\theta = (\theta - \frac{\pi}{4})$$

$$* \text{ قتا } (\theta - \frac{\pi}{4}) = \theta$$

$$! \text{ جا } \theta = \text{جتا } \theta$$



## تمارين ٤-٤



أولاً: أكمل ما يأتي:

- ١ جتا  $(\theta + 180^\circ) = \dots$       ٢ ظا  $(\theta + 180^\circ) = \dots$   
 ٣ قتا  $(\theta - 360^\circ) = \dots$       ٤ جا  $(\theta + 360^\circ) = \dots$   
 ٥ جا  $(\theta + 90^\circ) = \dots$       ٦ ظتا  $(\theta - 90^\circ) = \dots$   
 ٧ قا  $(\theta + 270^\circ) = \dots$       ٨ جتا  $(\theta - 270^\circ) = \dots$

ثانياً: أكمل كلاً مما يأتي بقياس زاوية حادة

- ٩ جا  $25^\circ = \dots$  جتا  $^\circ = \dots$       ١٠ جتا  $67^\circ = \dots$  جا  $^\circ = \dots$   
 ١١ ظا  $42^\circ = \dots$  ظتا  $^\circ = \dots$       ١٢ قتا  $13^\circ = \dots$  قا  $^\circ = \dots$   
 ١٣ إذا كان ظتا  $\theta = 2$  ط  $\theta = \dots$  حيث  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  فإن  $\theta = \dots$   
 ١٤ إذا كان جا  $\theta = 0$  جتا  $\theta = \dots$  حيث  $\theta$  زاوية حادة موجبة فإن  $\theta = \dots$   
 ١٥ إذا كان قا  $\theta = 0$  قا  $(\theta - 90^\circ) = \dots$  فإن ظتا  $\theta = \dots$   
 ١٦ إذا كان ظا  $\theta = 2$  ظتا  $\theta = \dots$  حيث  $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$  فإن  $\theta = \dots$   
 ١٧ إذا كان جتا  $\theta = 0$  جا  $\theta = \dots$  حيث  $\theta$  زاوية حادة موجبة فإن جا  $\theta = \dots$

ثالثاً: الاختيار من متعدد:

- ١٨ إذا كانت ظا  $(\theta + 180^\circ) = 1$  حيث  $\theta$  قياس أصغر زاوية موجبة فإن قياس  $\theta$  يساوي  
 أ  $45^\circ$       ب  $30^\circ$       ج  $60^\circ$       د  $135^\circ$   
 ١٩ إذا كان جتا  $\theta = 2$  جا  $\theta = \dots$  حيث  $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$  فإن جتا  $\theta = \dots$  تساوي  
 أ  $\frac{1}{\sqrt{2}}$       ب  $\frac{1}{2}$       ج  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       د  $1$   
 ٢٠ إذا كان جا  $\alpha = \dots$  جتا  $\beta = \dots$  حيث  $\alpha, \beta$  زاويتان حادتان فإن ظا  $(\beta + \alpha)$  تساوي  
 أ  $\frac{1}{\sqrt{2}}$       ب  $1$       ج  $\sqrt{2}$       د غير معروف  
 ٢١ إذا كان جا  $\theta = 2$  جتا  $\theta = \dots$  حيث  $\theta$  زاوية حادة موجبة فإن ظا  $(\theta - 90^\circ)$  تساوي  
 أ  $1$       ب  $\frac{1}{\sqrt{2}}$       ج  $1$       د  $\sqrt{2}$   
 ٢٢ إذا كان جتا  $(\theta + 90^\circ) = \frac{1}{2}$  حيث  $\theta$  قياس أصغر زاوية موجبة فإن قياس  $\theta$  يساوي  
 أ  $150^\circ$       ب  $31^\circ$       ج  $24^\circ$       د  $33^\circ$

رابعاً: أجب عن الأسئلة الآتية

(٢٢) أوجد إحدى قيم  $\theta$  حيث  $\theta \geq 0$  و  $\theta < 90^\circ$  التي تحقق كلاً من الآتي:

أ.  $\sin(\theta + 10^\circ) = \sin(\theta - 50^\circ)$

ب.  $\cos(\theta + 20^\circ) = \cos(\theta + 10^\circ)$

ج.  $\tan(\theta + 20^\circ) = \tan(\theta + 30^\circ)$

د.  $\cot(\theta + 20^\circ) = \cot(\theta + 40^\circ)$

(٢٤) أوجد قيمة كل مما يأتي:

أ.  $\sin 150^\circ$       ب.  $\cos 225^\circ$       ج.  $\tan 300^\circ$       د.  $\cot 780^\circ$

هـ.  $\cot \frac{11\pi}{6}$       و.  $\tan \frac{7\pi}{4}$       ز.  $\tan \frac{2\pi}{3}$       ح.  $\cot \frac{7\pi}{4}$

(٢٥) إذا كان الضلع النهائي لزاوية قياسها  $\theta$  والمرسومة في الوضع القياسي وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة

في النقطة ب  $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$  فأوجد:

أ.  $\sin(\theta + 180^\circ)$       ب.  $\sin(\theta - \frac{\pi}{4})$

ج.  $\cos(\theta - 360^\circ)$       د.  $\cos(\theta - \frac{\pi}{3})$

(٢٦) اكشف الخطأ: جميع الإجابات التالية صحيحة ماعدا إجابة واحدة فقط خطأ، فما هي:

١-  $\sin \theta$  تساوى

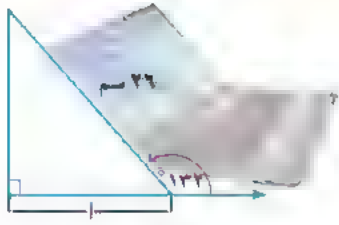
أ.  $\sin(\theta - 270^\circ)$       ب.  $\sin(\theta - 270^\circ)$       ج.  $\sin(\theta - 360^\circ)$       د.  $\sin(\theta + 360^\circ)$

٢-  $\sin \theta$  تساوى

أ.  $\sin(\theta - \frac{\pi}{4})$       ب.  $\sin(\theta - \pi)$       ج.  $\sin(\theta + \frac{\pi}{3})$       د.  $\sin(\theta + \frac{\pi}{4})$

٣-  $\sin \theta$  تساوى

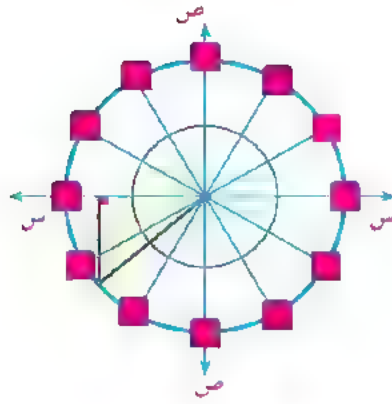
أ.  $\sin(\theta - 90^\circ)$       ب.  $\sin(\theta - 270^\circ)$       ج.  $\sin(\theta - 270^\circ)$       د.  $\sin(\theta + 180^\circ)$



٢٧) **الربط بالتكنولوجيا:** عند استخدام كريم حاسوبه المحمول كانت زاوية ميله مع الأفقى  $132^\circ$  كما هو موضح بالشكل المقابل.

أ ارسم الشكل السابق فى المستوى الإحداثى، بحيث تكون الزاوية  $132^\circ$  فى الوضع القياسى ثم أوجد زاويتها المنتسبة.

ب اكتب دالة مثلثية يمكن استخدامها فى إيجاد قيم أ، ثم أوجد قيمة أ لأقرب سنتيمتر.



**ألعاب:** تنتشر لعبة العجلة الدوارة فى مدينة الملاهى، وهى عبارة عن عدد من الصناديق تدور فى قوس دائرى يبلغ نصف قطره ١٢ مترًا، فإذا كان قياس الزاوية المشتركة مع الضلع النهائى فى الوضع القياسى  $\frac{\pi}{4}$ .

أ ارسم الزاوية التى قياسها  $\frac{\pi}{4}$  فى الوضع القياسى.

ب اكتب دالة مثلثية يمكن استخدامها فى إيجاد قيمة أ ثم أوجد قيمة أ بالمترا لأقرب رقمين عشريين.

٢٨) **تفكير ناقد.**

أ إذا كان  $\theta$  قياس زاوية مرسومة فى الوضع القياسى، حيث  $\theta = 1 - \sqrt{2}$ ، قتا  $\theta = \sqrt{2} - 1$ ، فهل يمكن أن يكون  $\theta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ ؟ فسر إجابتك؟

ب إذا كان جتا  $(\theta - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، جا  $(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$  فأوجد أصغر قياس موجب للزاوية  $\theta$ .

## سوف تتعلم

- سوف تتعلم
- رسم دالة الجيب واستنتاج خواصها.
- رسم دالة جيب التمام واستنتاج خواصها.



تعتمد الموجات فوق الصوتية على ترددات عالية تختلف في طول الموجة. كما تستخدم في التصوير الطبي، وتستخدمها الغواصات كجهاز رادار يعمل في أعماق المحيطات. وعند تمثيل هذه الموجات بمخططات بيانية لتعرف خواص دالة الجيب وجيب التمام قم أنت وزملاؤك بالأعمال التعاونية التالية:



## Represent sine function graphically

## التمثيل البياني لدالة الجيب

## المصطلحات الأساسية

- Sine Function دالة الجيب
- Cosine Function دالة جيب التمام
- Maximum Value قيمة عظمى
- Minimum Value قيمة صغرى



١ أكمل الجدول التالي بالاشتراك مع زملائك:

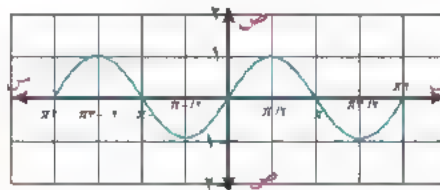
$\pi/2$	$\frac{\pi/1}{2}$	$\frac{\pi/4}{2}$	$\frac{\pi/3}{2}$	$\pi$	$\frac{\pi/5}{2}$	$\frac{\pi/6}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	٠	$\theta$
							٠,٥	٠	جا $\theta$

٢ ارسم المنحنى بتوصيل جميع نقاطه.

٣ أنشئ جدولاً آخر مستخدماً قيم المعكوس الجمعي للقيم الموجودة في الجدول السابق.

٤ عين جميع النقاط التي حصلت عليها على شبكة الإحداثيات.

٥ أكمل رسم المنحنى بتوصيل جميع نقاطه.



٦ هل لاحظت وجود قيم عظمى أو قيم صغرى لهذا المنحنى. فسّر إحابتك؟

## الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة رسومية
- حاسب كلى
- برامج رسومية



## Properties of the sine function

## خواص دالة الجيب

في الدالة د حيث  $\theta = \sin(\theta)$  فإن:

- ★ مجال دالة الجيب هو  $[-\infty, \infty]$ ، ومداها  $[-1, 1]$
- ★ دالة الجيب دالة دورية ذات دورة  $2\pi$  أى أنه يمكن إزاحة المنحنى فى الفترة  $[0, 2\pi]$  إلى اليمين أو اليسار  $2\pi$  وحدة،  $\pi$  وحدة،  $2\pi$  وحدة، ... وهكذا.
- ★ القيمة العظمى لدالة الجيب تساوى ١ وتحدث عند النقاط  $\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$   $n \in \mathbb{Z}$
- ★ القيمة الصغرى لدالة الجيب تساوى -١ وتحدث عند النقاط  $\theta = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$   $n \in \mathbb{Z}$

## Represent cosine function graphically

## التمثيل البياني لدالة جيب التمام

١ أكمل الجدول التالى بالاشتراك مع زملائك:

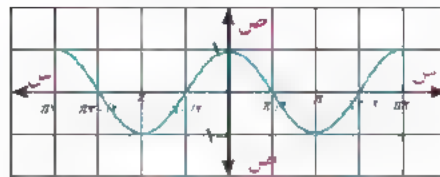
$\theta$	٠	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
حنا $\theta$	١	٠.٨											

٢ ارسم المنحنى بتوصيل جميع نقاطه.

٣ أنشئ جدولاً آخر مستخدماً قيم المعكوس الجمعى للقيم الموجودة فى الجدول السابق.

٤ عين جميع النقاط التى حصلت عليها على شبكة الإحداثيات.

٥ أكمل رسم المنحنى بتوصيل جميع نقاطه.



## Properties of cosine function

## خواص دالة جيب التمام

في الدالة د حيث  $\theta = \cos(\theta)$  فإن:

- ★ محال دالة جيب التمام هو  $[-\infty, \infty]$ ، ومداها  $[-1, 1]$
- ★ دالة جيب التمام دورية ذات دورة  $2\pi$ ، أى أنه يمكن إزاحة المنحنى فى الفترة  $[0, 2\pi]$  إلى اليمين أو اليسار  $2\pi$  وحدة،  $\pi$  وحدة،  $2\pi$  وحدة، ... وهكذا.

★ القيمة العظمى لدالة جيب التمام تساوي ١ وتحدث عند النقاط  $\theta = 2\pi n$   $n \in \mathbb{Z}$

★ القيمة الصغرى لدالة جيب التمام تساوي -١ وتحدث عند النقاط  $\theta = \pi \pm 2\pi n$   $n \in \mathbb{Z}$

### مثال

(١) **الربط بالميريا** يمكن لإحدى السفن الدخول إلى الميناء إذا كان مستوى المياه مرتفعاً نتيجة حركة المد والجزر، بحيث لا يقل عمق المياه عن ١٠ أمتار، وكانت حركة المد والجزر في ذلك اليوم تخضع للعلاقة  $f = 6 \sin(15^\circ n)$  حيث  $n$  هو الزمن الذي ينقضي بعد منتصف الليل بالساعات تبعاً لنظام حساب الوقت بـ ٢٤ ساعة. أوجد عدد المرات التي يبلغ فيها عمق المياه في الميناء ١٠ أمتار تمامًا. ارسم مخططاً بيانياً يبين كيف يتغير عمق المياه مع تغير حركة المد والجزر أثناء اليوم.

**الحل**

العلاقة بين الزمن ( $n$ ) بالساعات وعمق المياه ( $f$ ) بالأمتار هي

من العلاقة:  $f = 6 \sin(15^\circ n)$

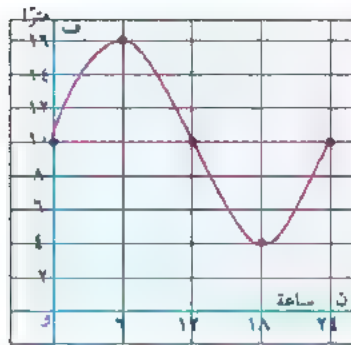
عندما  $n = 0$   $f = 6 \sin(0^\circ) = 6 \sin(0^\circ \times 15) = 6 \sin 0^\circ = 6 \times 0 = 0$

عندما  $n = 6$   $f = 6 \sin(6 \times 15^\circ) = 6 \sin 90^\circ = 6 \times 1 = 6$

عندما  $n = 12$   $f = 6 \sin(12 \times 15^\circ) = 6 \sin 180^\circ = 6 \times 0 = 0$

عندما  $n = 18$   $f = 6 \sin(18 \times 15^\circ) = 6 \sin 270^\circ = 6 \times (-1) = -6$

عندما  $n = 24$   $f = 6 \sin(24 \times 15^\circ) = 6 \sin 360^\circ = 6 \times 0 = 0$



ن الساعات	٠	٦	١٢	١٨	٢٤
ف بالأمتار	٠	٦	٠	-٦	٠

من الجدول نجد أن عمق المياه تبلغ ١٠ أمتار

عندما  $n = 0, 12, 24$  ساعة

**حاول أن تحل**

(١) في المثال السابق أوجد عدد الساعات خلال اليوم التي تستطيع فيها السفينة الدخول إلى الميناء؟

حيث  $s \in [0, 2\pi]$

حيث  $s \in [0, 2\pi]$

(١) ارسم منحنى الدالة  $s = 3 \cos$

(٢) ارسم منحنى الدالة  $s = 2 \cos$



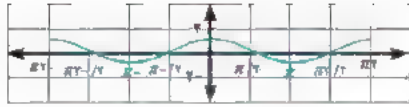
## تمارين ٤ - ٥



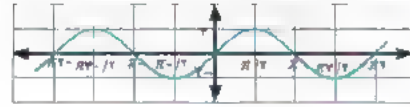
أولاً: أكمل ما يأتي:

- ١ مدى الدالة  $y = \sin(\theta)$  حيث  $\theta$  هو
- ٢ مدى الدالة  $y = \cos(\theta)$  حيث  $\theta$  هو
- ٣ القيمة العظمى للدالة  $y = \sin(\theta)$  حيث  $\theta$  هو
- ٤ القيمة الصغرى للدالة  $y = \cos(\theta)$  حيث  $\theta$  هو

ثانياً: اكتب قاعدة كل دالة مثلثية بجوار الشكل المناظر لها.



شكل (٢) القاعدة هي:



شكل (١) القاعدة هي:

ثالثاً: أجب عن الأسئلة الآتية:

- ٥ أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى، ثم احسب المدى لكل دالة من الدوال الآتية:

أ  $y = \sin \theta$

ب  $y = \cos \theta$

ج  $y = \sin \frac{\theta}{2}$

- ٦ مثل كل من الدوال  $y = \sin \theta$ ،  $y = \cos \theta$  باستخدام الآلة الحاسبة الرسومية أو بأحد برامج الحاسوب

الرسومية ومن الرسم أوجد:

- أ مدى الدالة.
- ب القيم العظمى والقيم الصغرى للدالة.

## إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية

Finding the Measure of an Angle Given the value of one of its Trigonometric Ratios

سوف تتعلم

4 إيجاد قياس زاوية بمعلومية دالة مثلثية

علمت أنه إذا كانت  $\sin \theta = \frac{1}{2}$  فإنه يمكن إيجاد قيمة  $\theta$  بمعلومية الزاوية  $\theta$ ، وعندما تعطى قيمة  $\theta$  فهل يمكنك إيجاد قيمة  $\sin \theta$ ؟



إذا كانت  $\sin \theta = \frac{1}{2}$  فإنه يمكن إيجاد قيم  $\theta$  إذا علمت قيمة  $\sin \theta$ .

مثال

المصطلحات الأساسية

4 دالة مثلثية.

Trigonometric Function

1 أوجد  $\theta$  حيث  $0^\circ < \theta < 360^\circ$  والتي تحقق كلاً مما يأتي:  
 أ  $\sin \theta = \frac{1}{2}$  ب  $\cos \theta = -\frac{1}{2}$

الحل

أ  $\sin \theta = \frac{1}{2}$  جيب الزاوية  $\frac{1}{2}$  الزاوية تقع في الربع الأول أو الثاني.  
 وباستخدام الآلة الحاسبة:

ابدأ  $\rightarrow$   $\text{SHIFT}$   $\text{sin}^{-1}$   $0$   $.$   $6$   $3$   $2$   $5$   $=$   $^\circ$

الربع الأول:  $\theta = 31.6^\circ$

الربع الثاني:  $\theta = 180^\circ - 31.6^\circ = 148.4^\circ$

ب  $\cos \theta = -\frac{1}{2}$  ظل تمام الزاوية  $\frac{1}{2}$

الزاوية تقع في الربع الثاني أو الرابع:

وباستخدام الآلة الحاسبة:

ابدأ  $\rightarrow$   $\text{SHIFT}$   $\text{cos}^{-1}$   $1$   $.$   $6$   $2$   $0$   $4$   $=$   $^\circ$

الربع الثاني:  $\theta = 180^\circ - 31.6^\circ = 148.4^\circ$

الربع الرابع:  $\theta = 360^\circ - 31.6^\circ = 328.4^\circ$

هل يمكنك التحقق من صحة الحل باستخدام الآلة الحاسبة؟

الأدوات والوسائل

4 آلة حاسبة علمية

### حاول أن تحل

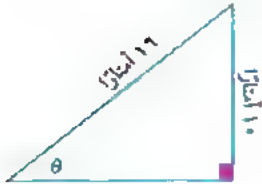
١ أوجد  $\theta$  حيث  $0 < \theta < 360^\circ$  والتي تحقق كلًا مما يأتي:

أ قتا  $\theta = (-10.37, 2)$

ب ظ  $\theta = (-3710, 2)$

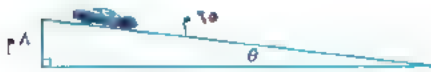
ج حتا  $\theta = 0.7205$

٥



٢ **الربط بالألعاب الرياضية:** توجد لعبة التزحلق في مدينة الألعاب، فإذا كان

ارتفاع إحدى اللعبات ١٠ أمتار وطولها ١٦ مترًا كما في الشكل المجاور. فاكتب دالة مثلثية يمكن استخدامها لإيجاد قيمة الزاوية  $\theta$  ثم أوجد قيمة هذه الزاوية بالدرجات. لأقرب جزء من ألف.



٣ **سيارات:** يهبط كريم بسيارته أسفل منحدر طوله

٦٥ متر وارتفاعه ٨ أمتار، فإذا كان المنحدر يصنع مع الأفقى زاوية قياسها  $\theta$ . أوجد  $\theta$  بالتقدير الستيني.



٤ **اكتشف الخطأ:** بسبب الرياح انكسرت نخلة طولها

٢٠ مترًا، بحيث تأخذ الشكل المجاور، فإذا كان طول الجزء الرأسى منها ٧ أمتار، والجزء المائل ١٣ مترًا وكانت  $\theta$  هي الزاوية التي يصنعها الجزء المائل مع الأفقى. فأوجد  $\theta$  بالتقدير الستيني.

إجابة عمر

$$\therefore \theta = 16^\circ 25' 05''$$

إجابة كريم

$$\therefore \theta = 32^\circ 34' 44''$$



٥ **التفكير الناقد:** الشكل المجاور يمثل قطعة مستقيمة تصل بين

النقطتين  $A(0, 3)$ ،  $B(3, 7)$  أوجد قياس الزاوية المحصورة بين  $\overline{AB}$  ومحور السينات.



## تمارين ٤ - ٦



أولاً: الاختيار من متعدد:

- ١) إذا كان  $\theta = ٤٣٢٥^\circ$ ، حيث  $\theta$  زاوية حادة موجبة فإن  $\angle (\theta)$  تساوى
- أ  $٢٥,٦٢٦^\circ$       ب  $٦٤,٣٤٧^\circ$       ج  $٣٢,٣٨٨^\circ$       د  $٤٦,٣١٦^\circ$
- ٢) إذا كان  $\theta = ١,٨$  وكانت  $٩٠^\circ \leq \theta \leq ٣٦٠^\circ$  فإن  $\angle (\theta)$  تساوى
- أ  $٦٠,٩٤٥^\circ$       ب  $١١٩,٠٥٥^\circ$       ج  $٢٤٠,٩٤٥^\circ$       د  $٢٩٩,٠٥٥^\circ$

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

- ١) إذا قطع الضلع النهائي لزاوية قياسها  $\theta$  في الوضع القياسى دائرة الوحدة فى النقطة ب، فأوجد كلاً من جتا  $\theta$ ، جا  $\theta$  فى الحالات الآتية:

أ ب  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$       ب ب  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$       ج ب  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

- ٢) إذا قطع الضلع النهائي لزاوية قياسها  $\theta$  فى الوضع القياسى دائرة الوحدة فى النقطة ب، فأوجد كلاً من جتا  $\theta$ ، قتا  $\theta$  فى الحالات الآتية:

أ ب  $(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$       ب ب  $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$       ج ب  $(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$

- ٣) إذا قطع الضلع النهائي لزاوية قياسها  $\theta$  فى الوضع القياسى دائرة الوحدة فى النقطة ب، فأوجد كلاً من ظا  $\theta$ ، ظلثا  $\theta$  فى الحالات الآتية:

أ ب  $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}})$       ب ب  $(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$       ج ب  $(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$

- ٤) إذا قطع الضلع النهائي لزاوية قياسها  $\theta$  فى الوضع القياسى دائرة الوحدة فى النقطة ب فأوجد:  $\angle (\theta)$  حيث  $٠^\circ < \theta < ٣٦٠^\circ$  عندما:

أ ب  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$       ب ب  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$       ج ب  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

٥) أوجد بالقياس الستيني أصغر زاوية موجبة تحقق كلاً من:

ج ظا  $1,4002'$

ب جتا  $0,436'$

أ جا  $0,6'$

د قتا  $(-1,7004)$

ه ظنا  $3,6218'$

و قا  $(-2,2374)$

٦) إذا كانت  $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$  فأوجد قياس زاوية  $\theta$  لكل مما يأتي:

ج ظا  $(-2,1407)$

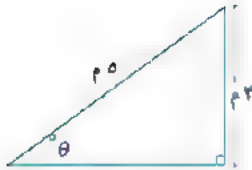
ب جتا  $(-0,742)$

أ جا  $(0,2306)$

٧) إذا كان  $\theta = \frac{1}{3}$  وكانت  $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

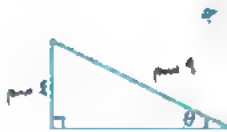
١ احسب قياس زاوية  $\theta$  لأقرب ثانية

ب أوجد قيمة كل من: جتا  $\theta$  ، ظا  $\theta$  ، قا  $\theta$ .



٨) **سالم:** سلم طوله ٥ أمتار يستند على جدار فإذا كان ارتفاع السلم عن سطح الأرض يساوي ٣ أمتار فأوجد بالراديان زاوية ميل السلم على الأفقى.

٩) أوجد قياس زاوية  $\theta$  بالقياس الستيني في كل شكل من الأشكال الآتية:





# ملخص الوحدة

١ الزاوية الموحدة: هي زوج مرتب من شعاعين (  $\vec{OA}$  ،  $\vec{OB}$  ) هما ضلعوا الزاوية، لهما نقطة بداية واحدة هي رأس الزاوية، ويسمى  $\vec{OA}$  الضلع الابتدائي، و  $\vec{OB}$  الضلع النهائي للزاوية:



٢ الوضع القياسي للزاوية: في نظام إحداثي متعامد تكون رأس الزاوية هي نقطة الأصل، وضلعها الابتدائي يقع على الجزء الموجب لمحور السينات.

٣ الزوايا المتكافئة: هي الزوايا التي قياساتها على الصورة  $(\theta + n \times 360^\circ)$  حيث  $n \in \mathbb{Z}$  يكون لها نفس الضلع النهائي.

٤ الزاوية النصف قطرية: هي الزاوية المركزية في الدائرة وتقابل قوساً طوله يساوي طول نصف قطر الدائرة.

٥ العلاقة بين القياس الستيني ولدائري: إذا كانت لدينا زاوية قياسها الستيني يساوي  $s^\circ$  وقياسها الدائري يساوي  $\theta$  فإن:

$$\theta = s^\circ \times \frac{\pi}{180} \text{ ، } s^\circ = \theta \times \frac{180}{\pi}$$

٦ طول القوس: إذا كان  $\theta$  هو قياس الزاوية المركزية لدائرة طول نصف قطرها هو  $r$  تقابل قوساً من الدائرة طوله  $l$  فإن:  $l = r \times \theta$

٧ الزاوية الربعية: هي زاوية في الوضع القياسي، بحيث يقع ضلعها النهائي على أحد المحورين  $s$  أو  $v$ .

٨ دائرة الوحدة: هي دائرة مرسومة في المستوى الإحداثي، ومركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها وحدة واحدة.

٩ النسبة المثلثية: هي نسبة بين طولَي ضلعين من أضلاع المثلث القائم الزاوية.

١٠ إشارات الدوال المثلثية:

لاحظ أن:

الربع الأول:	الربع الثاني:	الربع الثالث:	الربع الرابع:
$0^\circ < \theta < 90^\circ$	$90^\circ < \theta < 180^\circ$	$180^\circ < \theta < 270^\circ$	$270^\circ < \theta < 360^\circ$
كل الدوال المثلثية موجبة	جا $\theta$ ، قتا $\theta$ موجبتان وباقي الدوال سالبة.	ظا $\theta$ ، قتا $\theta$ موجبتان وباقي الدوال سالبة.	جتا $\theta$ ، قتا $\theta$ موجبتان وباقي الدوال سالبة.

## ملخص الوحدة

١١ الدوال المثلثية للزوايا التي قياساتها:

ثانيًا:  $(\theta + 180^\circ)$

$$\begin{aligned} \sin(\theta + 180^\circ) &= -\sin \theta, \quad \cos(\theta + 180^\circ) = -\cos \theta \\ \tan(\theta + 180^\circ) &= \tan \theta, \quad \cot(\theta + 180^\circ) = \cot \theta \\ \sec(\theta + 180^\circ) &= -\sec \theta, \quad \csc(\theta + 180^\circ) = -\csc \theta \end{aligned}$$

أولاً:  $(\theta - 180^\circ)$

$$\begin{aligned} \sin(\theta - 180^\circ) &= -\sin \theta, \quad \cos(\theta - 180^\circ) = -\cos \theta \\ \tan(\theta - 180^\circ) &= \tan \theta, \quad \cot(\theta - 180^\circ) = \cot \theta \\ \sec(\theta - 180^\circ) &= -\sec \theta, \quad \csc(\theta - 180^\circ) = -\csc \theta \end{aligned}$$

ثالثاً:  $(\theta - 360^\circ)$

$$\begin{aligned} \sin(\theta - 360^\circ) &= \sin \theta, \quad \cos(\theta - 360^\circ) = \cos \theta \\ \tan(\theta - 360^\circ) &= \tan \theta, \quad \cot(\theta - 360^\circ) = \cot \theta \\ \sec(\theta - 360^\circ) &= \sec \theta, \quad \csc(\theta - 360^\circ) = \csc \theta \end{aligned}$$

خامساً:  $(\theta + 90^\circ)$

$$\begin{aligned} \sin(\theta + 90^\circ) &= \cos \theta, \quad \cos(\theta + 90^\circ) = -\sin \theta \\ \tan(\theta + 90^\circ) &= -\cot \theta, \quad \cot(\theta + 90^\circ) = \tan \theta \\ \sec(\theta + 90^\circ) &= -\csc \theta, \quad \csc(\theta + 90^\circ) = \sec \theta \end{aligned}$$

رابعاً:  $(\theta - 90^\circ)$

$$\begin{aligned} \sin(\theta - 90^\circ) &= -\cos \theta, \quad \cos(\theta - 90^\circ) = \sin \theta \\ \tan(\theta - 90^\circ) &= \cot \theta, \quad \cot(\theta - 90^\circ) = -\tan \theta \\ \sec(\theta - 90^\circ) &= \csc \theta, \quad \csc(\theta - 90^\circ) = -\sec \theta \end{aligned}$$

سابعاً:  $(\theta + 270^\circ)$

$$\begin{aligned} \sin(\theta + 270^\circ) &= -\cos \theta, \quad \cos(\theta + 270^\circ) = \sin \theta \\ \tan(\theta + 270^\circ) &= \cot \theta, \quad \cot(\theta + 270^\circ) = -\tan \theta \\ \sec(\theta + 270^\circ) &= \csc \theta, \quad \csc(\theta + 270^\circ) = -\sec \theta \end{aligned}$$

سادساً:  $(\theta - 270^\circ)$

$$\begin{aligned} \sin(\theta - 270^\circ) &= \cos \theta, \quad \cos(\theta - 270^\circ) = -\sin \theta \\ \tan(\theta - 270^\circ) &= -\cot \theta, \quad \cot(\theta - 270^\circ) = \tan \theta \\ \sec(\theta - 270^\circ) &= -\csc \theta, \quad \csc(\theta - 270^\circ) = \sec \theta \end{aligned}$$

١٢ خواص كل من دالتى الجيب وجيب التمام

الخاصية	دالة الجيب $d(\theta) = \sin \theta$	دالة جيب التمام $d(\theta) = \cos \theta$
المجال والمدى	المجال هو $[-1, 1]$ ، المدى هو $[-1, 1]$	المجال هو $[-1, 1]$ ، المدى هو $[-1, 1]$
النقطة المنطقية	تساوى ١ عند $\theta = 2\pi, 4\pi, \dots$ ، تساوى -١ عند $\theta = \pi, 3\pi, \dots$	تساوى ١ عند $\theta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ ، تساوى -١ عند $\theta = \pi, 3\pi, \dots$
القيمة العكسية	تساوى ١ عند $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$ ، تساوى -١ عند $\theta = \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots$	تساوى ١ عند $\theta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ ، تساوى -١ عند $\theta = \pi, 3\pi, \dots$

١٣ إذا قطع الضلع النهائى للزاوية  $\theta$  المرسومة في الوضع القياسى دائرة الوحدة في النقطة ب(س، ص) فإن  $\sin \theta = \text{ص}$  ،  $\cos \theta = \text{س}$  وتعرف بالدوال الدائرية.

معلومات إضافية

قم بزيارة المواقع الآتية:



## اختبارات عامة

### الاختبار الأول

(الخبر وحساب المثلثات)

السؤال الأول : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) إذا كان ل، م جذري المعادلة  $س^2 - ٧س + ٣ = ٠$  فإن ل + م =

- أ ٧      ب ٣      ج ٥٨      د ٧٩

٢) إذا كانت  $حا = ١ - \theta$ ،  $حتا = \theta$ ، فإن  $\theta$  تساوى

- أ  $\frac{\pi}{4}$       ب  $\pi$       ج  $\frac{\pi}{2}$       د  $2\pi$

٣) المعادلة التربيعية التي جذراها ٢، ٣، ٤، ٥ هي

- أ  $س^4 + ١٣س + ٥ = ٠$       ب  $س^4 - ١٣س + ٥ = ٠$       ج  $س^4 + ١٣س - ٥ = ٠$       د  $س^4 - ١٣س - ٥ = ٠$

٤) إذا كان أحد جذري المعادلة  $س^2 - (٢+م)س + ٣ = ٠$  معكوساً جمعياً للجذر الآخر فإن م تساوى

- أ ٣      ب ٢      ج ٤      د ٥

السؤال الثاني : أكمل

أ الدالة د : حيث  $د(س) = -(س - ١)(س + ٣)$  موجبة في الفترة

ب الزاوية التي قياسها  $٩٣٠$  تقع في الربع

ج إذا كان  $حا = \frac{1}{4}$ ،  $حتا = \frac{\sqrt{3}}{4}$  فإن  $\theta$  تساوى

د المعادلة التربيعية التي جذراها ضعف جذري المعادلة  $س^2 - ٨س + ٥ = ٠$  هي

السؤال الثالث :

أ ضع العدد  $\frac{٢-٣}{٢+٣}$  في صورة عدد مركب. حيث  $ت = ٢ - ١$ .

ب إذا كان  $٤ جا = ٣$  أوجد  $د(س)$  حيث  $د(س) = \frac{س}{٣}$ .

السؤال الرابع :

أ إذا كانت د : ح  $\leftarrow$  ح حيث  $د(س) = س^2 + ٨س - ١٥$

أولاً : ارسم منحنى الدالة في الفترة  $[١, ٧]$  ثانياً : عين من الرسم إشارة هذه الدالة.

ب إذا كان  $س = ٢ + ٣ت$ ،  $ص = \frac{٢-٤}{٢-١}$  فأوجد  $س + ص$  في صورة عدد مركب.

السؤال الخامس :

أ أوجد مجموعة حل المتباينة  $س^2 + ٣س - ٤ \geq ٠$

ب إذا كان  $\frac{٣}{٤} = \sin \theta$  حيث  $١٨٠^\circ < \theta < ٢٧٠^\circ$  فأوجد قيمة:  $\sin(٣٦٠^\circ - \theta)$  -  $\cos(٩٠^\circ - \theta)$

## اختبارات عامة

### الاختبار الثاني

### (الجبر وحساب المثلثات)

#### السؤال الأول: أكمل ما يأتى

- ١ أبسط صورة للعدد التخيلي  $12 =$
- ٢ إذا كان جذرا المعادلة  $س^2 - ٢س + ٦ = ٠$  حقيقيان ومتساويان فإن  $ل =$
- ٣ إذا كان  $٠ < \theta < ٩٠^\circ$  وكان  $\text{جا } \theta = ٣$  جتا  $\theta$  فإن  $\theta$  ( )
- ٤ مدى الدالة  $د$  حيث  $د(\theta) = \frac{٣}{٢} \text{ جا } \theta$  هو

#### السؤال الثاني: اختر الإجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

- ١ المعادلة:  $س^2(س-١)(س+١) = ٠$  من الدرجة:
  - أ الأولى
  - ب الثانية
  - ج الثالثة
  - د الرابعة
- ٢ إذا كان جذرا المعادلة  $س^2 + ٢س - ٣ = ٠$  حقيقيان ومختلفان فإن  $م$  تساوى :
  - أ ١
  - ب ٢
  - ج ٣
  - د ٤
- ٣ إذا كان مجموع قياسات زوايا أى مضلع منتظم تساوى  $١٨٠(٢-٢)$  حيث  $٢$  عدد الأضلاع فإن قياس زاوية المثلث المنتظم بالقياس الدائرى تساوى:
  - أ  $\frac{\pi}{٣}$
  - ب  $\frac{\pi}{٢}$
  - ج  $\frac{\pi}{٤}$
  - د  $\frac{\pi}{٣}$

- ٤ إذا كان  $\theta = ٣٦^\circ$  ،  $\pi > \theta > ٠$  فإن  $\theta$  ( ) يساوى

- أ  $\frac{\pi}{٣}$
- ب  $\frac{\pi}{٦}$
- ج  $\frac{\pi}{٤}$
- د  $\frac{\pi}{٢}$

#### السؤال الثالث :

- أ أوجد قيمة  $ك$  التى تجعل أحد جذرى المعادلة :  $٤س^2 + ٧س + ك = ٠$  هو المعكوس الضربى للجذر الآخر.
- ب إذا كان  $\theta = \text{جا } ٧٥^\circ$  جتا  $٣٠^\circ + \text{جا } (-٦٠^\circ)$  فلنا  $١٢٠^\circ$  حيث  $٠ < \theta < ٣٦٠^\circ$  فأوجد  $\theta$  ( ) .

#### السؤال الرابع :

- أ أولا: أوجد قيمتى  $أ$  ،  $ب$  اللتين تحققان المعادلة :  $١٢ + ٣ = أ$  ،  $ب - ٣٧ = ٢$  ثانيا: أوجد فى  $ح$  مجموعة حل المتباينة:  $س(س+١) - ٢ \geq ٠$
- ب زاوية مركزية قياسها  $\theta$  مرسومة فى دائرة طول نصف قطرها  $١٨$  سم وتحصر قوسا طوله  $٢٦$  سم . أوجد  $\theta$  بالقياس الستينى.

#### السؤال الخامس :

- أ إذا كان مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية  $(١ + ٢ + ٣ + ..... + س)$  يعطى بالعلاقة  $ح = \frac{س}{٢} (١ + س)$  فكم عددا صحيحا متتاليا بدءا من العدد  $١$  يكون مجموعها مساويا  $٢١٠$
- ب إذا كان  $\text{جا } س = \frac{٤}{٥}$  حيث  $٩٠^\circ < س < ١٨٠^\circ$  فأوجد  $\text{جا } (١٨٠^\circ - س) + \text{ظا } (٣٦٠^\circ - س) + ٢ \text{ جا } (٢٧٠^\circ - س)$ .

## اختبارات عامة

(الهندسة)

### الاختبار الثالث

السؤال الأول: أكمل ما يأتى



١ المثلثان المشابهان لثالث يكونان .....

٢ فى الشكل المقابل:

أولاً: (أب) =  $\frac{1}{2}$  أى  $\times$  ..... ، (ج ب) =  $\frac{1}{2}$  ج ا  $\times$  .....

ثانياً: أى  $\times$  ج = ..... =

ثالثاً: أب  $\times$  ج = ..... =

السؤال الثانى: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ مستطيلان متشابهان الأول طوله ٥ سم والثانى طوله ١٠ سم ، فإن النسبة بين محيط الأول إلى محيط الثانى يساوى:

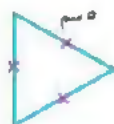
أ ٥ : ١

ب ١ : ٥

ج ١ : ٢

د ٢ : ١

٢ أى من المثلثين الآتيين متشابهين؟



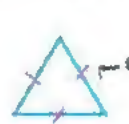
(١)



(٢)



(٣)



(٤)

أ (١) ، (٤)

ب (٢) ، (٣)

ج (١) ، (٣)

د (٢) ، (٤)

٣ إذا كانت النسبة بين محيطى مثلثين متشابهين ٤ : ١ فإن النسبة بين مساحتي سطحيهما تساوى

أ ١ : ٢

ب ١ : ٤

ج ١ : ٨

د ١ : ١٦

٤ فى الشكل المقابل: كل التعبيرات الرياضية التالية صحيحة ما عدا العبارة :

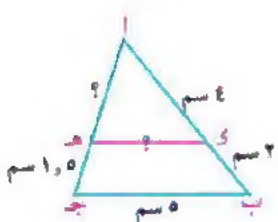


أ (أب) =  $\frac{1}{2}$  أى  $\times$  ..... ب (أب) =  $\frac{1}{2}$  أ هـ  $\times$  ..... ج (أب) =  $\frac{1}{2}$  أ هـ  $\times$  ..... د (أب) =  $\frac{1}{2}$  أ هـ  $\times$  .....

٥ أ ج  $\times$  أى = أ هـ  $\times$  او ..... ب أ ج  $\times$  جى = أ هـ  $\times$  هـ و ..... ج أ ج  $\times$  جى = أ هـ  $\times$  هـ و ..... د أ ج  $\times$  جى = أ هـ  $\times$  هـ و .....

السؤال الثالث :

١ فى الشكل المقابل:  $\triangle$  أ هـ  $\sim \triangle$  أ ب ج أثبت أن:  $\overline{وه} \parallel \overline{ب ج}$



وإذا كان: أى = ٤ سم ، بى = ٢ سم ، هـ ج = ١٠ سم ، ب ج = ٥ سم.

أوجد طول كل من أ هـ ، وهـ

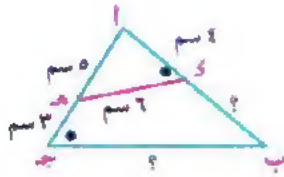
ب أب ج مثلث ، وهـ  $\parallel$  ب ج بحيث بى = ٥ سم ، وهـ ج = ٢ سم ، هـ  $\parallel$  أ ج بحيث أ هـ = ٢ سم ، ج هـ = ٤ سم.

أثبت أن  $\triangle$  وهـ ج  $\sim \triangle$  أ ب ج ، ثم أوجد النسبة بين مساحتي سطحيهما



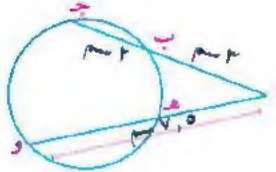
## اختبارات عامة

### السؤال الرابع :



أ في الشكل المقابل:  $DE \parallel BC$  ،  $AD = 4$  سم ،  $DB = 3$  سم ،  $AE = 5$  سم ،  $EC = 6$  سم ، أوجد طول كل من :  $DE$  ،  $BC$  ،  $AB$  ،  $AC$  .

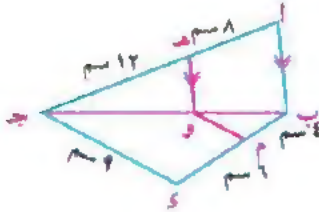
ب  $DE \parallel BC$  ،  $AD = 4$  سم ،  $DB = 3$  سم ،  $AE = 5$  سم ،  $EC = 6$  سم ، أوجد طول  $DE$  .



أ  $DE \parallel BC$  ،  $AD = 4$  سم ،  $DB = 3$  سم ،  $AE = 5$  سم ،  $EC = 6$  سم ، أوجد طول  $DE$  .

### السؤال الخامس :

أ في الشكل المقابل:  $DE \parallel BC$  ،  $AD = 4$  سم ،  $DB = 3$  سم ،  $AE = 5$  سم ،  $EC = 6$  سم ، أوجد طول  $DE$  .



ب في الشكل المقابل:

$DE \parallel BC$  ،  $AD = 4$  سم ،  $DB = 3$  سم ،  $AE = 5$  سم ،  $EC = 6$  سم ، أوجد طول  $DE$  .

أ  $DE \parallel BC$  ،  $AD = 4$  سم ،  $DB = 3$  سم ،  $AE = 5$  سم ،  $EC = 6$  سم ، أوجد طول  $DE$  .

أولاً: أوجد طول  $DE$  .

ثانياً: أثبت أن:  $DE \parallel BC$  .

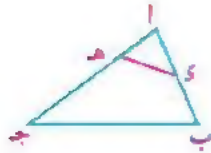
### (الهندسة)

### الاختبار الرابع

#### السؤال الأول : أكمل ما يأتي

١ أي مضلعين منتظمين لهما نفس عدد الأضلاع يكونان \_\_\_\_\_

٢ في الشكل المقابل:

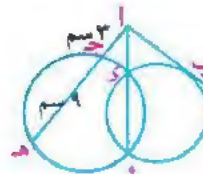


إذا كان المثلث  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$  ،

فإن  $DE \parallel BC$  ،  $AD = 4$  سم ،  $DB = 3$  سم ،  $AE = 5$  سم ،  $EC = 6$  سم .

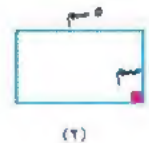
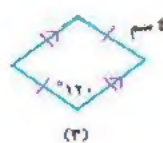
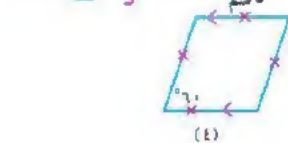
٣ إذا تقاطع المستقيمان الحاويزان للوترين  $DE$  ،  $BC$  في نقطة  $H$  ، فإن:  $HE \cdot HD = BH \cdot HC$  .

٤ في الشكل المقابل: إذا كان  $AD = 4$  سم ،  $DB = 3$  سم ،  $AE = 5$  سم ،  $EC = 6$  سم ، فإن  $AB =$  \_\_\_\_\_



#### السؤال الثاني : اختر الإجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة:

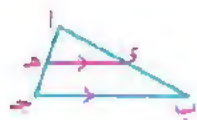
١ أي من المضلعين الآتيين متشابهين؟



## اختبارات عامة

- ١ المثلثان (١)، (٢) ب المثلثان (١)، (٣) ج المثلثان (٣)، (٤) د المثلثان (٢)، (٤)  
٢ إذا كانت النسبة بين مساحتي سطحي مثلثين متشابهين ٢٥ : ١٦ فإن النسبة بين طولي ضلعي متناظرين  
فيهما تساوى: أ ٥ : ٢ ب ٥ : ٤ ج ٢٥ : ١٦ د ٤١ : ١٦

٣ في الشكل المقابل: جميع التعبيرات الرياضية التالية صحيحة ما عدا التعبير:



أ  $\frac{ا هـ}{و ب} = \frac{ا د}{هـ ج}$  ب  $\frac{ا د}{و ب} = \frac{ا هـ}{ب ج}$   
ج  $\frac{ا هـ}{ا ب} = \frac{ا د}{ا ج}$  د  $\frac{ا ب}{ا ج} = \frac{ا د}{ب ج}$

٤ في الشكل المقابل: طول  $\overline{م ع}$  تساوى:



- أ ٢,٦ سم ب ٤ سم ج ٤,٢ سم د ٤,٨ سم

السؤال الثالث:

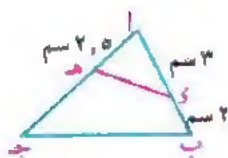
١ في الشكل المقابل:  $\triangle ا ب ج \sim \triangle ا هـ د$

أثبت أن الشكل ب ج د هـ رباعى دائرى وإذا كان  $ا ز = ٣$  سم،

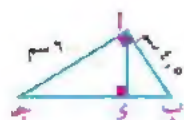
ب ز = ٢ سم، ا هـ = ٢,٥ سم. أوجد طول هـ ج.

ب ا ب ج د هـ شكل رباعى تقاطع قطراه فى هـ. رسم هـ و // ج د ويقطع ا ب فى و

رسم هـ م // ج د ويقطع ا ز فى م. أثبت أن و م // ب ز.



السؤال الرابع:



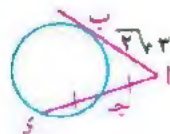
أ في الشكل المقابل: و (  $\angle ا ب ا ج$  ) = ٩٠°،  $\overline{ا ز} \perp \overline{ب ج}$ ، ا ب = ٤ سم،

ا ج = ٦ سم. أوجد طول كل من  $\overline{ب ز}$ ، و ج، ا ز

ب ا ب ج د هـ شكل رباعى فيه ب ج = ٢٧ سم، ا ب = ١٢ سم، ا ز = ٨ سم، و ج = ١٢ سم،

ا ج = ١٨ سم، أثبت أن  $\triangle ا ب ج \sim \triangle ا ز د$  و أوجد النسبة بين مساحتي سطحيهما.

السؤال الخامس:



أ في الشكل المقابل:  $\overline{ا ب}$  مماس للدائرة، ج منتصف ا ز

ا ب = ٣٦٣ أوجد طول ا ج

ب ا ب ج د هـ مثلث فيه ا ب = ٨ سم، ا ج = ١٢ سم، ب ج = ١٥ سم، ا ز ينصف ا ويقطع

ب ج فى ز، ثم رسم و هـ // ا ب ويقطع ا ج فى هـ، أوجد طول كل من  $\overline{ب ز}$ ، ج هـ



المقاس	$8 \frac{1}{2} \times 12$
عدد الصفحات بالغلاف	١٧٢ صفحة
ورق المتن	٧٠ جرام
ورق الغلاف	كوشيه ١٨٠ جم
ألوان المتن	٤ لـون
ألوان الغلاف	٤ لـون
رقم الكتـاب	٤١٧/١٠/٣/١١/١/٣٠

<http://elearning.moe.gov.eg>

